Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning i kompletteringskurs Linjär Algebra, SF1605, den 9 juni 2011, kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden, tel. 0730547891.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 15p.)

5	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
6	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
8	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
10	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
12	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
14	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Problem:

1. (2p) Visa, t ex med hjälp av ett induktionsbevis, att
$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

2. Betrakta R^5 försett med den inre produkten
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 \ .$$
Låt L vara det delrum till R^5 som genereras av vektorerna $(1, 0, 1, 0, 1)$, $(2, 1, 0, -1, -2)$ samt $(3, 1, 1, -1, -1)$.
   (a) (1p) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $L^{\perp}$ till L.
   (b) (1p) Utvidga denna bas till en bas för hela R^5.
   (c) (2p) Skriv vektorn $(1, 2, 3, 4, 5)$ som en summa av en vektor i L och en vektor i $L^{\perp}$.

3. (3p) Låt L vara ett 4-dimensionellt delrum till det 5-dimensionella vektorrummet V och låt A vara en linjär avbildning från V till vektorrummet W. Låt $A(L)$ beteckna det delrum till W som består av de vektorer $A(\bar{v})$ i W för vilka $\bar{v}$ tillhör L.

   Vilka möjligheter finns det för dimensionen hos delrummet $A(L)$ till W om A:s kärna har dimensionen 1. För full poäng krävs att du ger ett bevis av ditt svar.

4. (3p) Betrakta rummet $\mathcal{P}_n$ av polynom av grad högst lika med n och låt D beteckna derivering av polynom. Den linjära avbildningen A på $\mathcal{P}_n$ definieras genom
$$A(p(t)) = tD(p(t)) \ .$$
Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildningen A.

5. (3p) Låt A beteckna en linjär avbildning från vektorrummet V till vektorrummet W och låt B beteckna en linjär avbildning från W tillvektorrummet U. Under vilka förutsättningar kommer sammansättningen $B \circ A$ att vara en inverterbar linjär avbildning.