Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning i Linjär algebra komplettering, SF1605, måndagen den 11 januari 2010, kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 15p.)

5	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
6	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
8	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
10	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
12	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
14	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Problem:

1. Betrakta vektorrummet R^5.

   (a) (1p) Bestäm en bas för det delrum L till R^5 som spänns upp av vektorerna $(1, 2, 1, 3, 2)$, $(2, 0, 0, 3, 2)$, $(3, 3, 2, 7, 5)$ och $(1, 1, 1, 1, 1)$.

   (b) (1p) Visa att vektorn $\bar{u} = (1, -2, 1, 0, 0)$ inte tillhör L.

   (c) (1p) Om du hittar ytterligare en vektor $\bar{v}$ som inte tillhör L och som inte är parallell med $\bar{u}$, kommer då alltid $\bar{u}$ och $\bar{v}$ att tillsammans med en bas för det ovan givna delrummet L att bilda en bas för R^5. Motivera ditt svar!

2. En linjär avbildning A från R^4 till R^5 definieras av att $A(1, 1, 1, 1) = (1, 2, 1, 0, 1)$, $A(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, 0, 1)$, $A(0, 0, 1, 1) = (0, 1, 0, 1, 0)$ och $A(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 0, 0, 0)$.

   (a) (1p) Ange på ett lämpligt sätt en matris som beskriver avbildningen.

   (b) (1p) Bestäm avbildningens kärna.

   (c) (1p) Bestäm dimensionen hos avbildningens bildrum (”range”).

3. (3p) Visa med hjälp av induktion att för varje naturligt tal $n \geq 1$ gäller att talet 5 delar talet $4^{2n} - 1$.

4. (3p) Betrakta R^5. Bestäm en bas för snittet mellan delrummen L och M, om L spänns upp av (genereras av) vektorerna $(1, 2, 1, 2, 1)$, $(0, 1, 0, 1, 0)$ och $(3, 2, 1, 0, 1)$ och M spänns upp av $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 2, 1, 1)$ och $(1, 0, 1, 0, 1)$.

   (Snittet mellan två vektorrum består av vektorrummens gemensammma vektorer.)

5. Vi betraktar vektorrummet $\mathcal{P}_3$ av alla polynom av grad högst lika med 2. Summan av två vektorer $p(t)$ och $q(t)$, liksom multiplikation med skalär, ges av ”vanlig” polynomkalkyl, dvs $(p + q)(t) = p(t) + q(t)$ respektive $(\lambda p)(t) = \lambda p(t)$.

   (a) (1p) Finns det några värden på talet a som gör att produktbildningen

   $$(p \mid q) = p(1)q(1) + ap(2)q(2) + p(3)q(3) \ ,$$

   utgör en inre produkt i $\mathcal{P}_3$. Ange i så fall dessa värden på talet a. (Motivera din lösning!)

   (b) (2p) Bestäm en inre produkt i $\mathcal{P}_3$ sådan att polynomet t projiceras på polynomet 1 i det delrum till $\mathcal{P}_3$ som spänns upp av polynomen 1, $1 + t^2$, eller visa att en sådan inre produkt saknas.