Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kompletteringskurs till Linjär algebra , 5B1110, den 12 augusti 2002 kl 08.00-11.00.

Tillåtna hjälpmedel: INGA HJÄLPMEDEL ÄR TILLÅTNA.

Gränser: 9 poäng ger betyget tre, 13 poäng ger betyget fyra och 17 poäng ger betyget fem.

PROBLEM

1. a) (2p) Låt V vara ett tredimensionellt vektorrum försett med en inre produkt. Låt e_1, e_2 och e_3 utgöra en ON-bas i V. Bestäm längden av vektorn $e_1 + e_2 - e_3$.

b) (2p) Låt R^5 vara försett med den inre produkten

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 \quad \text{där} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_5) \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_5).$$

Bestäm en ON-bas i det delrum till R^5 som spänns upp av vektorerna $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, -1, 0, -2)$ och $(4, 4, 2, -5, 0)$.

2. (4p) Visa med hjälp av induktion eller annan metod att uttrycket $n^3 + 3n^2 + 2n$ är delbart med 6 för alla positiva heltal n.

3. (4p) Låt vektorrummet $P_n = \{p : p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\}$ vara försedd med skalärprodukten

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

Låt $p(x) = x$ och $q(x) = x^2 - x$ bilda en bas för delrummet M av P_2. Låt F vara den linjära avbildningen projektion på M. Bestäm matrisavbildningen i basen $1, x, x^2$.

4. a) (2p) Låt $P_n = \{p : p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\}$. Visa att för $a > 0$ och $p, q \in P_4$ definierar

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)\,dx + ap(1)q(1)$$

en skalärprodukt (inre produkt) i P_4.

b) (2p) Bestäm a så att polynomen $p(x) = x$ och $q(x) = x^2$ blir ortogonala i P_4.

5. Låt P_4 ha samma betydelse som i föregående uppgift.

a) (2p) Visa att i P_4 utgör alla polynom som är delbara med $x^2 - 2$ ett delrum M.

b) (2p) Bestäm en bas i M.