Matematiska Institutionen
KTH

Martins metod för att bestämma en linjär avbildnings matris.

Låt $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n$ utgöra en bas för vektorrumet R^n och låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ vara standardbasen för R^n. Låt A vara en linjär avbildning av R^n på R^m. Antag att vi känner till bildvektorerna $A\bar{f}_1, A\bar{f}_2, \ldots, A\bar{f}_n$ och vill bestämma avbildningens matris realtivt standardbasen. Teknologen Martin Wennerstein upptäckte år 2003 följande metod för att bestämma denna matris, mitt under en föreläsning i linjär algebra:

Placera vektorerna $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n$ som rader i en matris med vektorerna $A\bar{f}_1, A\bar{f}_2, \ldots, A\bar{f}_n$ direkt till höger:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} - & \bar{f}_1 & - & - & A\bar{f}_1 & - \\ - & \bar{f}_2 & - & - & A\bar{f}_2 & - \\ & \vdots & & & \vdots & \\ - & \bar{f}_n & - & - & A\bar{f}_n & - \end{array}\right).$$

Elementära radoperationer ändrar nu inte, pga linjariteten hos A, det faktum att i varje rad, "till höger om strecket" står bilden av vektorn till vänster om strecket. Till exempel har vi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} - & \bar{f}_1 & - & - & A\bar{f}_1 & - \\ - & \bar{f}_2 - \lambda\bar{f}_1 & - & - & A\bar{f}_2 - A\lambda\bar{f}_1 & - \\ & \vdots & & & \vdots & \\ - & \bar{f}_n & - & - & A\bar{f}_n & - \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} - & \bar{f}_1 & - & - & A\bar{f}_1 & - \\ - & \bar{f}_2 - \lambda\bar{f}_1 & - & - & A(\bar{f}_2 - \lambda\bar{f}_1) & - \\ & \vdots & & & \vdots & \\ - & \bar{f}_n & - & - & A\bar{f}_n & - \end{array}\right).$$

Så om vi med hjälp av elementära radoperationer fixar identitesmatrisen till vänster så har vi transponatet av avbildningens matris realtivt standardbasen till höger. Vi ger ett exempel:

Exempel $A : R^2 \to R^3$ och $A(1,1) = (1,2,3)$ med $A(1,-1) = (3,2,1)$ ger tablån

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Således $A(1,0) = (2,2,2)$ och $A(0,1) = (-1,0,1)$.

Avbildningens matris relativt standardbasen blir alltså

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$