Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på inre produktrum inför lappskrivning nummer 4 på kursen Linjär algebra för D, SF1604 , vt 11.

1. Lös i minstakvadratmening följande system

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{cases}$$

Lösning: Med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ges minstakvadratlösningen av

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

2. Betrakta R^4 med den inre produkten

$$< (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid (y_1, y_2, y_3, y_4) >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Bestäm en ortogonalbas till $L = span\{(1,1,2,1),(2,1,-1,-2),(1,1,1,1)\}$ samt utvidga denna bas till en ortogonalbas för hela R^4. Använd sedan den ortogonalbas du fann för L för attt bestämma ortogonala projektionen av vektorn $(1,2,1,1)$ på L.

Lösning: Låt $\bar{e}_1 = (2,1,-1,-2)$ och $\bar{e}_2 = (1,1,1,1)$. Då gäller att $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$. Sätt $\bar{f}_3 = (1,1,2,1)$ och låt

$$\bar{e}_3 = \bar{f}_3 - proj_{span\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}}(\bar{f}_3).$$

Då

$$proj_{span\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}}(\bar{f}_3) = \tfrac{<\bar{f}_3|\bar{e}_1>}{\|\bar{e}_1\|^2}\bar{e}_1 + \tfrac{<\bar{f}_3|\bar{e}_2>}{\|\bar{e}_2\|^2}\bar{e}_2 = \tfrac{-1}{10}(2,1,-1,-2) + \tfrac{5}{4}(1,1,1,1) =$$

$$\tfrac{1}{20}(21,23,27,29),$$

så får vi att

$$\bar{e}_3 = (1,1,2,1) - \frac{1}{20}(21,23,27,29) = \frac{1}{20}(-1,-3,13,-9).$$

Vi hyfsar den sista vektorn genom att förlänga den med 20.

Delsvar: En ortogonal bas för L ges av vektorerna $\bar{e}_1 = (2, 1, -1, -2)$, $\bar{e}_2 = (1, 1, 1, 1)$ och $\bar{e}_3 = (-1, -3, 13, -9)$.

Vi projicerar nu vektorn $\bar{u} = (1, 2, 1, 1)$ på L och använder därvid projektionslemmat.

$$\begin{aligned} proj_L(\bar{u}) = \quad & \tfrac{<\bar{u}|\bar{e}_1>}{\|\bar{e}_1\|^2}\bar{e}_1 + \tfrac{<\bar{u}|\bar{e}_2>}{\|\bar{e}_2\|^2}\bar{e}_2 + \tfrac{<\bar{u}|\bar{e}_3>}{\|\bar{e}_3\|^2}\bar{e}_3 = \\ & \tfrac{1}{10}(2, 1, -1, -2) + \tfrac{5}{4}(1, 1, 1, 1) + \tfrac{-3}{260}(-1, -3, 13, -9) = \\ & \tfrac{26}{260}(2, 1, -1, -2) + \tfrac{325}{260}(1, 1, 1, 1) + \tfrac{-3}{260}(-1, -3, 13, -9) = \\ & \tfrac{1}{260}(380, 360, 260, 300) = \tfrac{1}{13}(19, 18, 13, 15). \end{aligned}$$

För att komplettera med en fjärde vektor till en ortogonalbas för R^4 väljer vi

$$\bar{e}_4 = \bar{u} - proj_L(\bar{u}) = (1, 2, 1, 1) - \frac{1}{13}(19, 18, 13, 15) = \frac{1}{13}(-6, 8, 0, -2).$$

Vi hyfsar denna vektor genom att multiplicera med 13.

Svar: En ortogonal bas för R^4 med givna egenskaper ges av vektorerna $\bar{e}_1 = (2, 1, -1, -2)$, $\bar{e}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\bar{e}_3 = (-1, -3, 13, -9)$ och $\bar{e}_4 = (-6, 8, 0, -2)$.

3. Betrakta R^4. Bestäm (ortogonala) projektionen av vektorn $(1, 2, 2, 3)$ på delrummet

$$span\{(1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2)\}$$

till R^4. (Standardskalärprodukt.)

Lösning: Låt A vara som i uppgift nummer 1. Den ortogonala projektionen ges då av

$$A(A^T A)^{-1} A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 39 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Svar: $\frac{1}{19}(26, 39, 39, 52)$.

Kontroll: Vektorn $(1, 2, 2, 3) - \frac{1}{19}(26, 39, 39, 52) = \frac{1}{19}(-7, -1, -1, 5)$ skall vara vinkelrät mot $(1, 2, 1, 2)$ och $(1, 1, 2, 2)$, vilket den ju är.

4. Betrakta inreproduktrummet $C[-1, 1]$ bestående av alla kontinuerliga funktioner och med den inre produkten

$$(f(t) \mid g(t)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{dt}\ .$$

Bestäm $||1 - t||$ och $||1 + t||$ samt vinkeln mellan funktionerna $1 + t$ och $1 - t$.

Lösning: Enligt definition av längd av vektor är $||f(t)||^2 = (f(t) \mid f(t))$ och därmed har vi

$$||(1 - t)||^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 - t)(1 - t)\ \mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 + \mathrm{t}^2 - 2\mathrm{t}\ \mathrm{dt} = \frac{4}{3}\ ,$$

och

$$||(1 + t)||^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 + t)(1 + t)\ \mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 + \mathrm{t}^2 + 2\mathrm{t}\ \mathrm{dt} = \frac{4}{3}\ .$$

Cosinus för vinkeln θ mellan två vektorer $f(t)$ och $g(t)$ är ju definierat som

$$\cos\ \theta = \frac{(\ f(t) \mid g(t)\ )}{||f(t)|| \cdot ||g(t)||}\ ,$$

så då blir cosinus för den sökta vinkeln lika med

$$\cos\ \theta = \frac{\int_{-1}^{1}(1-t)(1+t)\ \mathrm{dt}}{||1-t|| \cdot ||1+t||} = \frac{2/3}{\sqrt{4/3}\sqrt{4/3}} = \frac{1}{2}$$

SVAR Funktionernas längder är $\sqrt{4/3}$ respektive $\sqrt{4/3}$ och vinkeln mellan funktionerna är $\pi/3$.

---

5. Bestäm ortogonala komplementet till lösningsrummet till följande system:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Lösning: Lösningsrummet består av de (x_1, x_2, x_3, x_4) sådana att

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (1, 1, -1, 1) \quad \text{och} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (1, 2, 1, -7).$$

Vektorerna $(1, 1, -1, 1)$ och $(1, 2, 1, -7)$ är då ortogonala mot all vektorer i lösningsrummet. Dessa vektorer spänner alltså upp ortogonala komplementet till lösningsrummet.

Svar: $span\{(1, 1, -1, 1), (1, 2, 1, -7)\}$.

6. Betrakar R^3. Visa att produktbildningen

$$< (x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3) >= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 7x_3y_3$$

inte är någon inre produkt på R^3.

Lösning: Vi fann att $< (1, -1, 0) \mid (1, -1, 0) >= 0$ vilket strider mot att $< \bar{u} \mid \bar{u} >\geq 0$ för alla vektorer $\bar{u}$ och med likhet precis då $\bar{u} = \bar{0}$.

7. Låt P_2 vara rummet av polynom av grad högst två och med den inre produkten

$$< p(t), q(t) >= \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

Bestäm en ortogonal bas i P_2.

Lösning: Låt $p_1(t) = 1$ och sök ett polynom av grad 1 som är ortogonalt mot $p_1(t)$. Ansats $p_2(t) = t - a$ och vi skall bestämma a så att

$$0 =< 1, t - a >= \int_0^1 1 \cdot (t - a)dt = [\frac{t^2}{2} - at]_0^1 = \frac{1}{2} - a.$$

Så vi låter

$$a = \frac{1}{2}.$$

Ett tredje polynom till ortogonalbasen får vi om vi låter

$$p_3(t) = t^2 - Proj_{span\{1,t-\frac{1}{2}\}}(t^2) = t^2 - \frac{< 1, t^2 >}{< 1, 1 >}1 - \frac{< t - \frac{1}{2}, t^2 >}{< t - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2} >}(t - \frac{1}{2}).$$

Fyra inre produkter att beräkna:

$$< 1, 1 >= \int_0^1 1 \cdot 1 dt = 1.$$

$$< 1, t^2 >= \int_0^1 1 \cdot t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

$$< t - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2} >= \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) \cdot (t - \frac{1}{2}) dt = [\frac{(t-\frac{1}{2})^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

$$< t - \frac{1}{2}, t^2 >= \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) \cdot t^2 dt = \int_0^1 t^3 - \frac{t^2}{2} dt = [\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{6}]_0^1 = \frac{1}{12}$$

Insättning i uttrycket för $p_3(t)$ ger nu polynomet

$$p_3(t) = t^2 - \frac{1}{3} - (t - \frac{1}{2}) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Svar: Till exempel $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t - \frac{1}{2}$ och $p_3(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$.

8. Betrakta R^3 och bestäm en inre produkt i R^3 sådan att vektorerna $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ och $(0, 0, 1)$ bildar en ON-bas i det inreproduktrum som den inre produkten definierar.

Lösning: Vi låter det tre givna vektorerna bilda en bas B' för R^3 så

$$B' = \{\ \bar{f}_1 = (1, 1, 0),\ \bar{f}_2 = (0, 1, 1),\ \bar{f}_3 = (0, 0, 1)\ \}\ .$$

Den så kallade standardbasen betecknar vi med B, dvs

$$B = \{\ \bar{e}_1 = (1, 0, 0),\ \bar{e}_2 = (0, 1, 0),\ \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\ \}\ .$$

Vi räknar nu i det nya bassystemet så och inför en inreprodukt i R^3. Om $\bar{u} = (x_1', x_2', x_3')_{B'}$ och $\bar{v} = (y_1', y_2', y_3')_{B'}$, så definierar vi

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = x_1'y_1' + x_2'y_2' + x_3'y_3'\ .$$

Denna produktbildning uppfyller alla krav man kan ställa på en inre produkt. Vi ser också att

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}\ . \tag{1}$$

som vi kanske hellre skriver

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}_{B'}^T \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}_{B'}\ ,$$

Vi har ett samband mellan koordinaterna i de givna bassytemen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}_{B'}$$

Vi beräknar nu inversen av transitionsmatrisen $\mathbf{T}$ ovan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Multiplikation med inversen till transitionsmatrisen **T** ger nu koordinatsambandet

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B$$

som också efter transponering kan skrivas

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Den inreprodukt vi definerade i bassytemet B' kan du efter substitution av uttrycken i ekvation (1), uttryckas i bassystemet B genom

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B ,$$

dvs efter transponering

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B ,$$

dvs

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B ,$$

Multiplicerar vi sedan ihop allt detta får vi

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3 \ .$$

Kontroll:

$$((1,1,0) \mid (1,1,0)) = 3 - 2 - 2 + 2 + 0 + .. + 0 = 1 \ ,$$

$$((1,1,0) \mid (0,1,1)) = 3 \cdot 0 - 2 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 - 1 = 0 \ ,$$

etc.