Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar inför lappskrivning nummer 3 på kursen Linjär algebra för D, vt 11.

1. Undersök om vektorn $(1,2,1,2)$ tillhör
$$\text{span}\{(1,2,3,4),(1,0,1,-1),(2,1,1,0)\}.$$

Lösning: Vi undersöker om det finns tal x_1, x_2 och x_3 sådana att
$$x_1(1,2,3,4)+x_2(1,0,1,-1)+x_3(2,1,1,0)=(1,2,1,2).$$
Detta ger ett ekvationssystem som på tablåform kan skrivas och lösas enligt nedan.
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$
vilket ju inte är möjligt eftersom $x_1=-1$ och $4x_1=2$ är en orimlighet.

Svar: Den givan vektorn tillhör inte det givna linjära höljet.

2. Visa att vektorerna $(1,1,1,1)$, $(1,1,-1,-1)$, $(1,-1,1,-1)$ och $(1,-1,-1,1)$ bildar en bas för R^4 och bestäm sedan koordinmaterna för vektorn $(1,2,3,4)$ i denna bas.

Lösning: De är en bas om den determinant som har de givna vektorerna som kolonner är skild ifrån noll. Vi får
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$
Nu återstår att lösa systemet
$$x_1(1,1,1,1)+x_2(1,1,-1,-1)+x_3(1,-1,1,-1)+x_4(1,-1,-1,1)=(1,2,3,4).$$
Detta system har tablån
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) =$$
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$
Man får att $x_3=-1/2$, $x_4=0$, $x_2=-1$ och $x_1=5/2$.

3. Bestäm baser för kolonnrummet, radrummet och nollrummet till nedanstående matris:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ange också matrisens rang.

Lösning: Enligt den gängse algoritmen utför vi elementära radoperationer på matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

De tre raderna i sluttablån bildar en bas för **A**:s radrum. I sluttablån är de tre första kolonnerna linjärt oberoende och bildar en bas för kolonnrummet. Motsvarande kolonner i **A** bildar då en bas för **A**:s kolonnrum. En bas för givna kolonnrummet är alltså $(1, 2, -1)^T$, $(1, 1, -1)^T$ och $(2, 3, 2)^T$.

För nollrummet löser vi systemet $\mathbf{A}\bar{x}^T = \bar{0}^T$ med hjälp av Gausselimination

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Sätt $x_4 = t$ och $x_5 = s$ och vi får $x_3 = -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}s$,

$$x_2 = -x_3 - 3x_5 - 6x_5 = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}s - 3t - 6s = -\frac{3}{2}t - \frac{11}{2}s,$$

och

$$x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = \frac{3}{2}t + \frac{11}{2}s - 2(-\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}s) - t - 2s = \frac{5}{2}t + \frac{9}{2}s.$$

Alltså

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{5}{2}t + \frac{9}{2}s, -\frac{3}{2}t - \frac{11}{2}s, -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}s, t, s) =$$
$$t(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0) + s(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1).$$

En bas för nollrummet år alltså $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0)$ och $(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1)$. Matrisens rang är lika med tre eftersom sluttablån, på trappstegsform, innehåller precis tre icke nollrader.

4. Undersök om det finns några värden på talet a för vilka de fyra vektorerna $(1, 2, 1, 3)$, $(1, 0, -1, 2)$, $(1, 1, 1, 1)$ och $(2, a, a, 2a)$ blir linjärt oberoende i R^4.

Lösning: Vektorerna är linjärt beroende precis då

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 2+a \\ 2 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 5 & 0 & 3 & 4a \end{vmatrix} = -1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2+a \\ 2 & 1 & a \\ 5 & 3 & 4a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2-a \\ 2 & 1 & a \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2-a \\ -1 & a \end{vmatrix} = -2a + (2-a) = 2 - 3a.$$

När $a \neq \frac{2}{3}$ är vektorerna linjärt oberoende.

5. Bestäm dimension och ange en bas för det minsta delrum till R^5 som innehåller vektorerna $(1,2,1,2,1)$, $(3,2,1,1,3)$, $(-1,-1,2,1,1)$ och $(3,3,4,4,5)$.

Lösning: Linjära höljet av dessa vektorer är lika med det minsta delrum som innehåller dessa vektorer. Vi lägger in vektorerna som rader i en matris. Sen utför vi elementära radoperationer på matrisen tills den kommer på så kallad trappsetgsform. Raderna som är skilda från noll bildar då en bas och dimensionen är lika med antale icke nollrader.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Svar: Dimensionen blir 3 och en bas till exempel $(1,2,1,2,1)$, $(0,1,3,3,2)$ och $(0,0,10,7,8)$.

6. Visa att de vektorer (x_1,x_2,x_3,x_4) i R^4 som satisfierar ekvationen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

bildar ett delrum L_1 till R^4. Bestäm en bas för detta delrum och ange dess dimension.

Lösning: De vektorer som satisfierar den givna ekvationen är lösningsrummet till det homogena systemet

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

och alla lösningsrum till homogena system är delrum till R^4. Vi kan välja $x_2 = t$, $x_3 = s$ och $x_4 = u$ godtyckligt och får då att

$$x_1 = -2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2t - s + 2u.$$

Alltså blir de sökta vektorerna (x_1,x_2,x_3,x_4) precis följande

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-2t-s+2u,t,s,u) = t(-2,1,0,0) + s(-1,0,1,0) + t(2,0,0,1)$$

Vektorerna $(-2,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$ och $(2,0,0,1)$ är linjärt oberoende och spänner upp lösningsrummet. Dimensionen blir alltså 3.

7. Låt L_2 vara det delrum till R^4 som består av de vektorer (x_1,x_2,x_3,x_4) sådana att

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\ .$$

Låt L_1 vara som i föregående uppgift. Då gäller att de vektorer som tillhör både L_1 och L_2 bildar ett delrum till R^4. Bestäm dimension och en bas för detta delrum.

Lösning: Att (x_1,x_2,x_3,x_4) tillhör bägge rummen innebär att både $x_1+2x_2+x_3-2x_4 = 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ skall gälla. Detta ger ett homogent ekvationssystem. De sökta vektorerna (x_1,x_2,x_3,x_4) utgöres av lösningarna till ett homogent system och är därmed ett delrum till R^4. Löses detta system med Gausselemination får vi

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = t(0,1,0,1) + s(1,0,-1,0).$$

Dimensionen blir två och som bas kan vi t ex välja $(0,1,0,1)$ och $(1,0,-1,0)$

8. Visa att de tre vektorerna $\bar{e}_1 = (1,2,-2,1)$, $\bar{e}_2 = (2,1,3,1)$ och $\bar{e}_3 = (1,3,4,1)$ är linjärt oberoende i R^4 och komplettera sedan med en vektor $\bar{e}_4$ så att $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ bildar en bas för R^4.

Lösning: Sätter upp en tablå med dessa vektorer som kolonner och kompletterar sedan med standardbasen som kolonner. Nu har vi garanterat ett kolonnrum som har dimension fyra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementära radoperationer ger nu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -6 & 1 & 25 \end{pmatrix}$$

De fyra första kolonnerna i sluttablån är linjärt oberoende. Då kommer de fyra första kolonnerna i starttablån att vara linjärt oberoende. Eftersom de är fyra kommer de att spänna upp hela R^4 och därmed vara en bas för R^4.

Svar: $\bar{e}_1 = (1,2,-2,1)$, $\bar{e}_2 = (2,1,3,1)$, $\bar{e}_3 = (1,3,4,1)$ och $\bar{e}_4 = (1,0,0,0)$.

9. Bestäm snittet mellan de bägge linjära höljena V_1 och V_2 nedan, dvs bestäm samtliga vektorer som tillhör både V_1 och V_2:

$$\begin{aligned} V_1 &= \operatorname{span}\{(1,2,3,2,1),(2,1,0,1,-1),(0,1,1,1,1)\}\ , \\ V_2 &= \operatorname{span}\{(2,1,3,1,1),(0,2,3,1,2),(1,1,1,1,0)\}\ . \end{aligned}$$

Lösning: Vektorn $(x_1,\dots,x_5)$ tillhör V_1 precis då

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = t(1,2,3,2,1) + s(2,1,0,1,-1) + u(0,1,1,1,1)$$

för några tal s,t,u. Dvs precis då ekvationssystemet med tablån

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 3 & 0 & 1 & x_3 \\ 2 & 1 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & 1 & x_5 \end{array}\right)$$

är lösbart. Gausselimination ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -6 & 1 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_4 - 2x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_5 - x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 - x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_2 + x_1 \end{array}\right).$$

Således gäller att (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) tillhör V_1 precis då $x_4 - x_2 = 0$ och $x_5 - x_2 + x_1 = 0$.

Liknande räkningar ger att en vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tillhör V_2 precis då $5x_4 - 4x_2 + x_3 - 2x_1 = 0$ och $4x_4 - 3x_2 + x_5 - x_1 = 0$, men OBSERVERA andra steg i Gausseliminationen ger andra ekvationer, så man kan få rätt svar fast med olika ekvationer.

En vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tillhör både V_1 och V_2 om följande system satisfieras av vektorn

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_4 - x_2 & = & 0 \\ x_5 - x_2 + x_1 & = & 0 \\ 5x_4 - 4x_2 + x_3 - 2x_1 & = & 0 \\ 4x_4 - 3x_2 + x_5 - x_1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Om dett system löses erhåller man lösningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t(1, 1, 1, 1, 0).$$

SVAR: De gemensamma vektorerna är de som kan skrivas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t(1, 1, 1, 1, 0)$ för något tal t.

OBS 1. Andra uppgiften på lappskrivningen kan eventuellt bli svårare än uppgifterna 5 – 8.

Lösningar kommer på kurshemsidan senast några dagar före lappskrivningen.