Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på geometri och vektorer inför lappskrivning nummer 2 på kursen Linjär algebra II, SF1604, vt11.

1. En triangel har hörn i punkterna $(1, 2, 1)$, $(-1, 3, 0)$ och $(1, 1, 1)$. Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln samt triangelns area och längden av triangelns sidor (ON-system).

   LÖSNING: Med $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-1, 3, 0)$ och $R = (1, 1, 1)$ får triangeln sidorna

   $$PQ = (-2, 1, -1), \quad PR = (0, -1, 0) \text{ och } QR = (2, -2, 1).$$

   Vi använder nu kända formler för att beräkna vinklar och längder samt arean.

   $$\| PQ \| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \quad \| PR \| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1,$$

   och

   $$QR = \sqrt{^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$

   Triangelns area är hälften av den area som det parallellogram har, som spänns upp av PR och PQ dvs

   $$arean = \frac{1}{2} \| PQ \times PR \|$$

   Vi får enligt formel för beräkning av kryssprodukt att

   $$PQ \times PR = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3.$$

   Arean blir således

   $$\frac{1}{2} \| PQ \times PR \| = \frac{1}{2} \| (-1, 0, 2) \| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

   Låt nu θ beteckna vinkeln mellan PQ och PR. Då gäller

   $$\cos(\theta) = \frac{PQ \cdot PR}{\| PQ \| \cdot \| PR \|} = \frac{(-2, 1, -1) \cdot (0, -1, 0)}{\| (-2, 1, -1) \| \cdot \| (0, -1, 0) \|} = \frac{-1}{\sqrt{6}}.$$

   Triangelns övriga vinklar beräknas på samma sätt

2. Visa att hörnen $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 4)$, $(3, -1, -1)$ och $(4, 1, 1)$ är hörn i en parallellogram.

   LÖSNING: Benämn punkterna $P = (1, 1, 2)$, $Q = (2, 3, 4)$, $R = (3, -1, -1)$ och $S = (4, 1, 1)$. Ett parallellogram kännetecknas av att sidorna paravis är parallella och som följd därav lika långa.

   Vi finner efter prövning att

   $$PQ = (1, 2, 2) = RS \quad \text{och} \quad PR = (2, -2, -3) = QS.$$

   Alltså parallellogram.

   OBS Vi var tvugna att pröva oss fram för att hitta rätt sidor.

3. En parallellepiped har ett hörn i origo och de tre angränsande hörnen i punkterna $(1,1,1)$, $(2,0,-1)$ och $(3,1,2)$. Bestäm parallellepipedens volym.

   LÖSNING: Parallellepipeden spänns upp av vektorerna som mellan origo och de angränsande hörnen, dvs av vektorerna $(1,1,1)$, $(2,0,-1)$ och $(3,1,2)$. Enligt känd formel ges då volymen av beloppet av den determinant som innehåller dessa vektorer som kolonner, eller rader, dvs av determinanten
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
   som blir lika med
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$
   Volymen av parallellepipeden är alltså 4.

4. Sök tal a, b och c sådana att vektorerna $(1,1,1)$, $(1,2,a)$ och $(1,b,c)$ blir vinkelräta mot varandra.

   LÖSNING:
$$0 = (1,1,1)\cdot(1,2,a) = 1+2+a,$$
   ger $a=-3$. Vidare kräver vi att
$$0 = (1,1,1)\cdot(1,b,c) \quad \text{och} \quad 0 = (1,2,a)\cdot(1,b,c).$$
   Då $a=-3$ får vi att
$$0 = 1+b+c \quad \text{och} \quad 0 = 1+2b-3c.$$
   Detta linjära system för b och c ger $b=-4/5$ och $c=-1/5$.

5. Bestäm skärningspunkten mellan den linje, som passerar genom punkterna P och Q med koordinaterna $(1,1,-1)$ respektive $(2,1,2)$, och det plan som förutom origo innehåller punkterna $(3,0,1)$ och $(2,1,1)$.

   LÖSNING: Linjens riktningsvektor är $\overline{PQ} = (2,1,2)-(1,1,-1) = (1,0,3)$. En punkt (x,y,z) ligger på linjen precis då
$$(x,y,z) = (1,1,-1)+t(1,0,3) = (1+t,1,-1+3t)$$
   för något tal t.

   Vi söker nu planets ekvation. En normal till planet är vinkelrät mot vektorerna $(3,0,1)$ och $(2,1,1)$ eftersom dessa är parallella med planet. Kryssprodukten av dessa vektorer ger en normal
$$\bar{n} = (3,0,1)\times(2,1,1) = ... = (-1,-1,3).$$
   Planets ekvation blir då
$$-1(x-0)+(-1)(y-0)+3(z-0)=0 \quad \text{dvs} \quad -x-y+3z=0.$$
   En punkt (x,y,z) tillhör alltså planet precis då dess koordinater satisfierar denna ekvation. Således, en punkt $(x,y,z)=(1+t,1,-1+3t)$ på linjen ligger i planet planet om och endast om
$$-(1+t)-1+3(-1+3t)=0,$$
   för något tal t. För $t=5/8$ är denna ekvation uppfylld. Den sökta skärningspunkten är
$$(x,y,z) = (1+\frac{5}{8},1,-1+3\frac{5}{8}) = (\frac{13}{8},1,\frac{7}{8}).$$

6. Bestäm talet a så att vektorerna $(1,1,1)$, $(2,1,a)$ och $(-1,-2,3)$ är parallella med samma plan.

   LÖSNING: Vektorerna ligger i samma plan precis då volymen av den parallellepiped som spänns upp av dessa vektorer är lika med 0. Denna volym är beloppet av en determinant vars rader består av de givan vektorerna. Vi får alltså

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2+a \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + (a-2) = a - 6.$$

   Precis när $a = 6$ ligger vektorerna i samma plan.

7. Bestäm spegelbilden av punkten $(1,2,1)$ i det plan som innehåller punkten $(2,1,0)$ och som innehåller linjen med parameterformen $(x,y,z) = (1,3,2) + t(1,0,-1)$.

   LÖSNING: En vektor parallell med planet är linjens riktningsvektor $(1,0,-1)$. En annan vektor parallell med planet är vektorn mellan punkten $(2,1,0)$ och punkten $(1,3,2)$ på linjen, dvs vektorn $(1,-2,-2)$. En normal till detta plan ges av kryssprodukten av dessa vektorer

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2\bar{e}_1 + 1\bar{e}_2 + (-2)\bar{e}_3.$$

   Planets ekvation blir då

$$-2(x-2) + (y-1) - 2z = 0 \quad \text{dvs} \quad 2x - y + 2z = 3.$$

   Linjen genom punkten $(1,2,1)$ parallell med planets normal har parameterforman

$$(x,y,z) = (1,2,1) + t(-2,1,-2).$$

   Vi bestämmer nu det t-värdet för vilket linjen skär planet. Som i uppgift 5 får vi

$$2(1-2t) - (2+t) + 2(1-2t) = 3 \quad \text{som ger} \quad t = \frac{-1}{9}.$$

   Med det dubbla t-värdet fortsätter vi från den givna punkten passerar planet och hamnar på planets andra sida, lika långt från planet ifråga som startpunkten ligger på. Detta är spegelbilden, som alltså har koordinaterna

$$(x,y,z) = (1,2,1) + \frac{-2}{9}(-2,1,-2) = (\frac{13}{9}, \frac{16}{9}, \frac{13}{9}).$$

8. Bestäm talet a så att linjerna med parameterformerna

$$(x,y,z) = (1,1,2) + t(1,0,-1) \quad \text{respektive} \quad (x,y,z) = (2,a,1) + t(2,1,-1)$$

   skär varandra.

   LÖSNING: Vi skall bestämma talet a så att det finns tal t och tal s med

$$(1,1,2) + t(1,0,-1) = (2,a,1) + s(2,1,-1).$$

   Dessa värden på t och s ger då en gemensam punkt, dvs en skärningspunkt. Ekvationen ovan ger likheten

$$(-1, 1-a, 1) = (2s - t, s, -s + t)$$

dvs systemet

$$\begin{cases} 2s & - & t & = & -1 \\ s & & & = & 1-a \\ -s & + & t & = & 1 \end{cases}$$

Betraktar vi enbart den första och sista av dessa ekvationer får vi att $s = 0$ och $t = 1$. Med $a = 1$ kommer även ekvation nummer två att vara uppfylld.

Sammanfattningsvis: enda möjliga värde på a är 1 och vi får då skärningspunkten $(2, 1, 1)$.

9. Bestäm den punkt på linjen $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, 1, -1)$ som ligger närmast origo.

LÖSNING: Kortaste avståndet är vinkelräta avståndet. Låt O beteckna origo och P en godtycklig punkt på linjen. Avståndet ges av längden av den vektor OP som är vinkelrät mot linjens riktningsvektor $(2, 1, -1)$. Då $OP = (1 + 2t, 1 + t, 1 - t)$ får vi rätt t-värde ur ekvationen

$$0 = (2, 1, -1) \cdot (1 + 2t, 1 + t, 1 - t) = 2(1 + 2t) + (1 + t) - (1 - t) = 6t + 2,$$

dvs $t = -1/3$. Avståndet blir alltså lika med

$$\| (1 + 2\frac{-1}{3}, 1 + \frac{-1}{3}, 1 - \frac{-1}{3}) \| = \| (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \| = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{21}$$

10. Bestäm ett plan på avstånd 1 från planet med ekvationen $x + y - 2z = 1$ (ON-system).

LÖSNING: En normal till planet är $\bar{n} = (1, 1, -2)$. Längden av denna vektor är

$$\| \bar{n} \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

Vi får en vektor $\bar{e}$ med längd 1 och med samma riktning som normalen $\bar{n}$ om vi multiplicerar $\bar{n}$ med $1/||\bar{n}||$ dvs med $1/\sqrt{6}$:

$$\bar{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Punkten med koordinaterna $(1, 0, 0)$ tillhör givna planet eftersom denna punkts koordinater satisfierar planets ekvation $x + y - 2z = 1$. Punkten med koordinaterna

$$Q = (1, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) = (\frac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$$

kommer att ligga på avståndet ett från givna planet. Ett plan med normalvektorn $\bar{n} = (1, 1, -2)$ och genom punkten Q kommer att vara paralellt med givna planet och ligga på avstånd ett från detta. Dess ekvation blir

$$(x - \frac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{6}}) + (y - \frac{1}{\sqrt{6}}) - 2(z - \frac{-2}{\sqrt{6}}) = 0.$$

11. Bestäm parameterformen för den linje i planet med ekvationen $x + 2y - 2z = 1$ som passerar genom punkten $(3, 0, 1)$ och är vinkelrät mot vektorn $(1, 1, 1)$.

LÖSNING: Den sökta linjens riktning är vinkelrät mot planets normal, eftersom linjen ligger i planet. Så om $\bar{v}$ är en riktningsvektor för linjen så måste $\bar{v}$ vara vinkelrät mot planets normal $(1, 2, -2)$. Dessutom var det givet i uppgiften att $\bar{v}$ är vinkelrät mot vektorn $(1, 1, 1)$. Väljer vi $\bar{v}$ som kryssprodukten mellan $(1, 2, -2)$ och $(1, 1, 1)$ så får vi en riktningsvektor för den sökta linjen.

En sedvanlig beräkning av kryssprodukt ger

$$(1, 2, -2) \times (1, 1, 1) = (4, -3, -1).$$

Nu har vi både en punkt $(3, 0, 1)$ på den sökta linjen och en riktningsvektor $(4, -3, -1)$ för linjen. Således

Svar: $(x, y, z) = (3, 0, 1) + t(4, -3, -1)$.