Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till lappskrivning nummer 5B till kursen Linjär algebra II för D, SF1604, den 8 mars 2011, kl 10.15-10.50.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkanda uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. För den linjära avbildningen B från R^3 till R^3 gäller att $B(1,2,2) = (1,1,0)$, $B(1,0,1) = (1,0,1)$ och $B(1,0,0) = (0,1,0)$. Bestäm den till B inversa avbildningens matris relativt standardbasen.

Lösning: För den inversa avbildningen B^{-1} till B gäller då att $(1,2,2) = B^{-1}(1,1,0)$, $(1,0,1) = B^{-1}(1,0,1)$ och $(1,0,0) = B^{-1}(0,1,0)$. Martins metod ger nu tablåerna

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Så

SVAR:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Bestäm matriserna till två linjära avbildningar A och B från R^3 till R^3 sådana att både A och B har en kärna av dimension 1 men den sammansatta avbildningen $B \circ A$ har en kärna av dimension 2.

Lösning: Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ beteckna standardbasen i R^3. Vi låter A bestämmas av att

$$A\bar{e}_1 = \bar{e}_1, \quad A\bar{e}_2 = \bar{e}_2, \quad A\bar{e}_3 = \bar{0}\ .$$

och B bestämmas av att

$$B\bar{e}_1 = \bar{e}_1, \quad B\bar{e}_2 = \bar{0}, \quad A\bar{e}_3 = \bar{e}_3\ .$$

Då gäller att

$$B \circ A\bar{e}_1 = \bar{e}_1, \quad B \circ A\bar{e}_2 = \bar{0}, \quad B \circ A\bar{e}_3 = \bar{0}\ .$$

Både A:s och B:s bildrum har då dimension 2 och avbildningen $B \circ A$ har då ett bildrum av dimension 2. Detta ger då att motsvarande kärnor har dimension 1, 1 resp 2. Matriserna är nu lätta att ge:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$