

Matematiska Institutionen  
KTH

**Lösningar till lappskrivning nummer 4A till kursen Linjär algebra II för D, SF1604, den 2 mars 2011, kl 10.15-10.50.**

1. (ON-system) Bestäm projektionen av vektorn  $(1, 1, 2, 2)$  på det delrum  $L$  till  $R^4$  som genereras av vektorerna  $(1, 1, 0, 1)$  och  $(1, 1, -1, -2)$ , dvs  $L = \text{Span}\{(1, 1, 0, 1), (1, 1, -1, -2)\}$ .

**Lösning:** De uppspannande vektorerna  $\bar{f}_1 = (1, 1, 0, 1)$  och  $\bar{f}_2 = (1, 1, -1, -2)$  är ortogonala eftersom den inre produkten mellan dem är 0. Vi får då projektionen till

$$\begin{aligned} \text{Proj}_L((1, 1, 2, 2)) &= \frac{(1, 1, 2, 2) \cdot (1, 1, 0, 1)}{(1, 1, 0, 1) \cdot (1, 1, 0, 1)} \bar{f}_1 + \frac{(1, 1, 2, 2) \cdot (1, 1, -1, -2)}{(1, 1, -1, -2) \cdot (1, 1, -1, -2)} \bar{f}_2 = \\ &= \frac{4}{3}(1, 1, 0, 1) + \frac{-4}{7}(1, 1, -1, -2) = \frac{28}{21}(1, 1, 0, 1) + \frac{-12}{21}(1, 1, -1, -2) = \frac{1}{21}(16, 16, 12, 4). \end{aligned}$$

**SVAR:**  $(16/21, 16/21, 12/21, 4/21)$ .

2. Låt  $P_n$  vara rummet av polynom av grad högst lika med  $n$  och med den inre produkten

$$\langle p(t) | q(t) \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt.$$

Då är  $P_0$  ett delrum till  $P_2$  och  $P_0$  har ett ortogonalt komplement  $P_0^\perp$  i rummet  $P_2$ . Bestäm en bas för  $P_0^\perp$ .

**Lösning:** Rummet  $P_2$  har dimension 3 eftersom en bas för detta rum är  $1, t, t^2$ . Rummet  $P_0$  har dimension 1 så rummet  $P_0^\perp$  kommer att ha dimension 2. En bas för detta rum är då två vektorer  $p_1(t)$  och  $p_2(t)$  i  $P_2$  som är ortogonala mot  $P_0$ . Eftersom  $P_0$  spänns upp av polynomet 1 skall  $\langle p_1(t) | 1 \rangle = 0$  och  $\langle p_2(t) | 1 \rangle = 0$ , dvs,

$$\int_{-1}^1 p_1(t) \cdot 1 dt = 0 \quad \text{och} \quad \int_{-1}^1 p_2(t) \cdot 1 dt = 0.$$

Varken polynomen  $t$  eller  $t^2$  tillhör  $P_0$  så vi använder oss av dessa polynoms projektioner  $a$  resp  $b$  på  $P_0$  för att hitta polynom i  $P_0^\perp$ . Vi söker alltså  $a$  och  $b$  så att

$$\int_{-1}^1 (t - a) \cdot 1 dt = 0 \quad \text{och} \quad \int_{-1}^1 (t^2 - b) \cdot 1 dt = 0.$$

Då

$$\int_{-1}^1 t \cdot 1 dt = 0 \quad \int_{-1}^1 b \cdot 1 dt = 2b \quad \text{och} \quad \int_{-1}^1 t^2 \cdot 1 dt = 2/3,$$

kan vi låta  $p_1(t) = t$  och  $p_2(t) = t^2 - 1/3$ .

**SVAR:** Till exempel  $t$  och  $t^2 - 1/3$  utgör en bas för  $P_0^\perp$ .