

Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till lappskrivning nummer 4A till kursen Linjär algebra II för D, SF1604, den 23 februari 2010, kl 15.15-15.40.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. (ON-system) Bestäm projektionen av vektorn $(1, 1, 2, 2)$ på det delrum L till R^4 som genereras av vektorerna $(1, 0, 2, 1)$ och $(1, 1, -1, 1)$, dvs $L = \text{Span}\{(1, 0, 2, 1), (1, 1, -1, 1)\}$.

Lösning: De två generatorerna för L är ortogonala mot varandra och bildar d—ärför en ortogonalbas för L . Vi får alltså

$$\begin{aligned} \text{Proj}_L((1, 1, 2, 2)) &= \frac{(1, 1, 2, 2) \cdot (1, 0, 2, 1)}{\|(1, 0, 2, 1)\|^2}(1, 0, 2, 1) + \frac{(1, 1, 2, 2) \cdot (1, 1, -1, 1)}{\|(1, 1, -1, 1)\|^2}(1, 1, -1, 1) = \\ &= \frac{7}{6}(1, 0, 2, 1) + \frac{2}{4}(1, 1, -1, 1) = \frac{1}{6}(10, 3, 11, 10). \end{aligned}$$

SVAR: $\frac{1}{6}(10, 3, 11, 10)$.

2. Låt $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$ och $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ beteckna standardbasen i R^3 . Bestäm en bas \mathbf{f} bestående av basvektorerna \bar{f}_1 , \bar{f}_2 och \bar{f}_3 för R^3 sådan att

$$\begin{aligned} (3, 1, 3) &= \bar{f}_1 + 2\bar{f}_2, \\ (2, 3, 4) &= \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + 2\bar{f}_3, \\ (1, 1, 2) &= \bar{f}_2 + \bar{f}_3, \end{aligned}$$

dvs $(3, 1, 3)$ har koordinaterna $(1, 2, 0)$ i basen \mathbf{f} , $(2, 3, 4)$ har koordinaterna $(1, 1, 2)$ i basen \mathbf{f} och $(1, 1, 2)$ har koordinaterna $(0, 1, 1)$ i basen \mathbf{f} .

Lösning: Givet är ett ekvationssystem för vektorer som vi löser med sedvanlig Gauss elimination:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (3, 1, 3) = \bar{f}_1 + 2\bar{f}_2 \\ (2, 3, 4) = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + 2\bar{f}_3 \\ (1, 1, 2) = \bar{f}_2 + \bar{f}_3 \end{cases} &\sim \begin{cases} (3, 1, 3) = \bar{f}_1 + 2\bar{f}_2 \\ (-1, 2, 1) = -\bar{f}_2 + 2\bar{f}_3 \\ (1, 1, 2) = \bar{f}_2 + \bar{f}_3 \end{cases} \sim \\ &\sim \begin{cases} (3, 1, 3) = \bar{f}_1 + 2\bar{f}_2 \\ (-1, 2, 1) = -\bar{f}_2 + 2\bar{f}_3 \\ (0, 3, 3) = 3\bar{f}_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ur detta system får vi att $\bar{f}_3 = (0, 1, 1)$, $\bar{f}_2 = (1, 0, 1)$ och $\bar{f}_1 = (1, 1, 1)$.