

Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till lappskrivning nummer 3B till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 16 februari 2011, kl 10.15-10.50.

1. Bestäm dimensionen hos det delrum till R^5 som består av alla linjärkombinationer av de fyra vektorerna $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 2, 3, 5)$, $(-1, 1, 1, 3, 5)$ och $(2, 0, 3, 2, 1)$.

Lösning: Vi placerar vektorerna som rader i en matris. Matrisens rang är lika med dimensionen hos matrisen radrum, vilket är dimensionen av det givna delrummet till R^5 . Vi utnyttjar att elementära radoperationer inte ändrar radrummet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Eftersom dimensionen av radrummet till slutmatrisen är 4 får vi

SVAR: Dimensionen är fyra.

2. Låt \mathbf{A} beteckna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Låt $N(\mathbf{A})$ beteckna nollrummet till denna matris. Ange på ett lämpligt sätt, och med en motivering, två 4-dimensionella delrum L och M till R^5 sådana att

$$N(\mathbf{A}) = L \cap M.$$

(OBSERVERA: Man får använda, utan att bevisa det, att snittet mellan två delrum till ett vektorrum, dvs de vektorer som tillhör båda delrummen, alltid utgör ett delrum till vektorrummet ifråga.)

Lösning: Matrisen \mathbf{A} har uppenbarligen rangen 2 eftersom dess två rader är linjärt oberoende. Enligt fundamentalsatsen har då nollrummet dimension $5 - 2 = 3$. Vidare, enligt definition av nollrum är $N(\mathbf{A})$ lika med lösningsmängden till systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Låt L vara lösningsmängden till systemet

$$\{ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \}$$

och M lösningsmängden till systemet

$$\{ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0. \}$$

Då uppfyller dessa delrum de specificerade kraven i uppgiften.