Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 3A till kursen Linjär algebra II för D, SF1604, den 16 februari 2010, kl 15.15-15.40.

1. Undersök om det finns några värden på talet a för vilka de fyra vektorerna $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, -1, 0)$, $(0, 0, 3, 1)$ och $(0, a, a, 0)$ i R^4 blir linjärt oberoende.

Lösning: Vi placerar de fyra vektorerna som kolonner i en determinant och undersöker om den är skild från noll:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{utv eft rad 1} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{utv eft rad 3} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & a \end{vmatrix}$$

så determinanten blir $(-1) \cdot 1 \cdot a - (-1)a = 2a$. De fyra vektorerna är alltså linjärt oberoende om och endast om $a \neq 0$.

2. Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} .$$

Låt L beteckna nollrummet till denna matris, dvs de kolonnmatriser $\mathbf{x}^T = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^T$ sådana att

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Ange, med motivering, en bas för ett delrum M till R^5, med $\dim(M) \geq \dim(L)$, och sådant att de vektorer som tillhör både L och M, dvs $L \cap M$, bildar ett delrum av dimension 2 till R^5.

(Man får använda utan att bevisa det att snittet mellan två delrum till ett vektorrum alltid är ett delrum.)

Lösning: Vi tager två linjärt oberoende vektorer $\bar{e}_1^T$ och $\bar{e}_2^T$ i nollrummet och kompletterar med en tredje vektor $\bar{e}_3^T$ som inte tillhör nollrummet.

Vi bestämmer nollrummet: Matrisen är redan en trappstegsmatris så låter $x_3 = t$, $x_4 = s$ och $x_5 = u$ och får

$$x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -2t - 3s - 2u , \qquad x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = (2t+3s+2u) - t - s - u = t + 2s + u ,$$

och därmed

$$[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5] = t[1\ -2\ 1\ 0\ 0] + s[2\ -3\ 0\ 1\ 0] + u[1\ -2\ 0\ 0\ 1] .$$

Till exempel kan vi låta

$$\bar{e}_1^T = [1\ -2\ 1\ 0\ 0]^T , \qquad \bar{e}_2^T = [1\ -2\ 0\ 0\ 1]^T$$

Tager nu en vektor som inte tillhör nollrummet, genom prövning finner vi att

$$\bar{e}_3^T = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T ,$$

inte tillhör nollrummet eftersom $\mathbf{A}\bar{e}_3^T \neq \mathbf{0}$.

SVAR: Till exempel $\bar{e}_1^T = [1\ -2\ 1\ 0\ 0]^T$, $\bar{e}_2^T = [1\ -2\ 0\ 0\ 1]^T$, $\bar{e}_3^T = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$.