

Matematiska Institutionen  
KTH

**Lösning till lappskrivning nummer 1B till kursen Linjär algebra II för D, SF1604, den 2 februari 2011, kl 10.15-10.50.**

1. Låt  $\mathbf{A}$  och  $\mathbf{B}$  vara matriser enligt nedan. Bestäm en matris  $\mathbf{X}$  sådan att  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Lösning:** Vi bestämmer först inversen till matrisen  $\mathbf{A}$  med hjälp av den vanliga algoritmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi multiplicerar nu ekvationen  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  med  $\mathbf{A}^{-1}$  till vänster och får  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ , så

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Undersök om det finns något värde på talet  $a$  för vilket de två systemen nedan har någon gemensam lösning.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 4 \\ 2x + 5y + az = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y + az = 9 \\ 2x + 4y + 3z = a \end{cases}$$

**Lösning:** En gemensam lösning satisfierar samtliga fyra ekvationer, och vi har att studera ett ekvationssystem med tre obekanta och fyra ekvationer. Vi genomför detta i tablåform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 4 \\ 2 & 5 & a & | & 7 \\ 1 & 3 & a & | & 9 \\ 2 & 4 & 3 & | & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & a-4 & | & -1 \\ 0 & 1 & a-2 & | & 5 \\ 0 & 0 & -1 & | & a-8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & a-4 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & -1 & | & a-8 \end{pmatrix}$$

Den tredje ekvationen i sluttablån ger att  $z = 3$ , och då den fjärde ekvationen lyder  $-z = a - 8$  måste vi ha att  $a = 5$  för att en lösning skall finnas. Men med detta värde på talet  $a$  insatt i sluttablån hittar vi en lösning till systemet, eftersom det är på trappstegsform.

**SVAR:** Om och endast om  $a = 5$  har de två systemen en gemensam lösning.