Matematiska Institutionen
KTH

**Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 14 mars 2011 kl 08.00-13.00.**

**Hjälpmedel:** Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

**Betygsgränser:** (Totalsumma poäng är 40p.)

| | | |
|---|---|---|
| 13 | poäng totalt eller mer ger minst omdömet | Fx |
| 15 | poäng totalt eller mer ger minst betyget | E |
| 20 | poäng totalt eller mer ger minst betyget | D |
| 25 | poäng totalt eller mer ger minst betyget | C |
| 30 | poäng totalt eller mer ger minst betyget | B |
| 35 | poäng totalt eller mer ger minst betyget | A |

**Bonuspoäng:** Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen för D under vt11 adderas till skrivningspoängen. Generellt gäller att bonuspoäng får användas vid ordinarie tentamen och vid första ordinarie omtentamenstillfälle för respektive sektion, vilket för sektion F liksom för sektion D är den 9 juni i år.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

---

# DEL I

1. (5p) För ett eller flera värden på talet $a$ kommer ekvationssystemet nedan att ha oändligt många lösningar. Bestäm dessa värden på $a$ samt bestäm samtliga lösningar till systemet för dessa $a$-värden.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + az = 3 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

2. (5p) För den linjära avbildningen $A$ på $R^3$ gäller att $A(1,1,1) = (1,2,3)$, $A(0,1,1) = (4,5,6)$ och $A(0,0,1) = (7,8,9)$. Bestäm avbildningens matris relativt standardbasen, bestäm $A(3,2,1)$ samt bestäm avbidningens kärna.

3. (5p) Kolonnvektorn $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T$ är en egenvektor till matrisen $\mathbf{A}$ nedan,
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Bestäm matrisens samtliga egenvärden och egenvektorer samt en matris $\mathbf{P}$ sådan att $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ är en diagonalmatris.

---

# DEL II

4. (5p) I den vanliga 3-dimensionella rymden, och med koordinater givna i ett ON-system, står vi i punkten $P = (1, 2, 3)$ och betraktar planet $\pi$ med ekvationen $2x + 3y - z = 13$. Vi skickar två ljusstrålar från $P$ mot $\pi$, en som går vinkelrätt mot planet $\pi$ och en som går parallellt med vektorn $(0, -1, 1)$. Dessa strålar träffar planet $\pi$ i punkterna $Q$ respektive $R$. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $P$, $Q$ och $R$.

5. (5p) Visa, t ex med hjälp av ett induktionsbevis, att talen

$$a_n = 4^n + (-3)^n ,$$

satisfierar rekursionen

$$a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}, \quad a_0 = 2,\ a_1 = 1$$

för samtliga naturliga tal $n = 0, 1, 2, \ldots$.

6. (5p) (ON-system) Låt $L$ beteckna det delrum till $R^5$ som spänns upp av vektorerna $(1, 2, -1, 2, 1)$, $(1, 3, -2, 4, 5)$ och $(1, 0, 1, -2, -7)$, dvs

$$L = \text{Span}\{(1, 2, -1, 2, 1), (1, 3, -2, 4, 5), (1, 0, 1, -2, -7)\} .$$

Bestäm projektionen av vektorn $(1, 1, 1, 1, 1)$ på delrummet $L$.

---

# DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times n$-matris.
   (a) (1p) Visa att om $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, där $\mathbf{I}$ betecknar identitetsmatrisen, så har $\mathbf{A}$ full rang.
   (b) (2p) Visa att om $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$, där $\mathbf{0}$ betecknar nollmatrisen, så är $\mathbf{A}$:s rang högst lika med $n/2$.
   (c) (2p) Om $\mathbf{A}^3 = 0$, vad kan då sägas om $\mathbf{A}$:s rang? Motivera ditt svar!

8. Det finns en inre produkt i $R^3$ sådan att $(1, 2, -1)$, $(2, 0, 1)$ och $(1, -1, 1)$ kommer att bilda en ON-bas i det inreproduktrum $V$ som den inre produkten definierar.
   (a) (1p) Betrakta nu $R^3$ med denna nya inre produkt och låt $\bar{f}_1 = (2, -2, 2)$. Bestäm vektorer $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ sådana att $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ bildar en ortogonalbas i $V$.
   (b) (2p) Betrakta $R^3$ med denna nya inre produkt och låt $\bar{g}_1 = (1, 2, 3)$. Bestäm vektorer $\bar{g}_2$ och $\bar{g}_3$ sådana att $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ och $\bar{g}_3$ bildar en ortogonalbas i $V$.
   (c) (2p) Betrakta nu $R^3$ samt fyra godtyckliga vektorer $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ och $\bar{z}$ av vilka inga två är parallella med varandra. Kommer det då alltid att finnas en inre produkt i $R^3$ sådan att $\bar{u} \perp \bar{v}$ och $\bar{w} \perp \bar{z}$ ? Motivera ditt svar!