

Extra uppgifter. Tal och funktioner, SF1643 för Bio och K.

[Skriv ut \(pdf\)](#)

Induktion

I1. Visa att $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = (n^3 - n)/3$, $n=2,3,\dots$.

I2. Visa (utan att använda I1) att $n^3 - n$ är jämnt delbart med 3 ($n=2,3,\dots$).

I3. Visa att $3^n \geq n \cdot 2^n$, $n=1,2,\dots$.

I4. Visa med induktionsbevis att $2+5+8+\dots + 3n-1 = n(3n+1)/2$, $n=1,2,\dots$.

I5. Visa att $5^n - 1$ är jämnt delbart med 4 för $n=1,2,\dots$.

Potenser och logaritmer

H1. Ett radioaktivt ämne har halveringstiden 7200 år. Efter hur lång tid är koncentrationen nere i 1% av den ursprungliga?

Svar $14400 \cdot \ln 10 / \ln 2$, c:a 47836 år.

H2. En bakteriepopulation antas tillväxa exponentiellt. Efter 2 timmar är bakteriemassan 5 gånger så stor som i början. Hur stor är fördubblingstiden?

Svar: $\ln 4 / \ln 5$, c:a 0.86 tim.

H3. Hur stor är halveringstiden för den radioaktiva isotop vars massa minskat till 10% av den ursprungliga efter 100 år.

Svar $100 \ln 2 / \ln 10 = 100 \lg 2 = 30.1 \dots$ år.

H4. En kaninpopulation antas tillväxa exponentiellt. Efter 5 år har antal kaniner ökat med en faktor 3. Efter hur lång tid kan populationen väntas ha blivit 10 gånger så stor?

Svar: $5 \ln 10 / \ln 3 = 10.48 \dots$ år.

H5. Lös ekvationen $e^{2x} = 3 \cdot 10^x$.

Svar: $-\ln 3 / (\ln 10 - 2)$