Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 6B till kursen Diskret matematik för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 7 maj 2009, kl 08.15-08.40.

Namn: Olof Heden

Resultat: 2p

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Låt F vara kroppen bestående av elementen i mängden

$$F = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in Z_2\},$$

och där man räknar som om $p(x) = 0$ där $p(x) = x^4 + x^3 + 1$. Lös i F ekvationen

$$xz = 1 + x^3.$$

Motivering av svar skall redovisas

Lösning: Vi ser (kanske) att

$$x^4 + x^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = x^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad x \cdot x^3 = x^3 + 1.$$

Då det bara finns en lösning till en given ekvation $\alpha \cdot z = \beta$ i en kropp så är den enda lösningen
Svar: $z = x^3$.

2. Betrakta kroppen $GF(49)$ som består av elementen

$$GF(49) = \{a + bx \mid a, b \in Z_7\}$$

och där man räknar som om $x^2 = -1$. Polynomet $p(z) = z^2 + 3xz - 2x + 3$ har nollstället $z = 3x + 1$ i $GF(49)$. Bestäm polynomets samtliga nollställen i $GF(49)$.
Glöm ej att motivera väl.

Lösning: Polynomet har en unik faktorisering

$$p(z) = (z - \alpha)(z - \beta),$$

där α och β är polynomets nollställen. Faktoriseringen ovan ger

$$p(z) = z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta,$$

så rötternas summa är lika med $-(3x)$, och med givna roten $\alpha = 3x + 1$ blir den andra roten

$$\beta = -3x - (3x + 1) = -6x - 1 = x - 1.$$

Svar: $x - 1$.