Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 5A till kursen Diskret matematik för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 29 april 2009, kl 13.15-13.40.

Namn: Olof Heden

Resultat: 2p

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Låt G vara en cyklisk grupp med 45 element och antag att G genereras av elementet g, dvs $G =< g >$. Bestäm samtliga delgrupper till G.
(**OBS**: Satser och beteckningar givna under kursen, i lärobok och vid undervisning, får användas. **Ingen** motivering behövs, utan ange bara delgrupperna.)

Lösning Enligt känd sats har G precis en delgrupp med d element för varje delare d till 45. Dessa delgrupper måste dessutom vara cykliska eftersom G är cyklisk. Generatorer kommer att vara elementen $q^{n/d}$. Så förutom de triviala delgrupperna G och $\{e\}$ får vi alltså delgrupperna

$$< g^{15} >, \qquad < g^9 >, \qquad < g^5 >, \qquad < g^3 > .$$

eftersom delarna äro, 3, 5, 9, 15.

2. Låt $U(R)$ beteckna den multiplikativa gruppen i ringen R, dvs mängden som består av alla med avseende på multiplikation inverterbara element i R.

a) Ange en ring R sådan att $U(R)$ består av 36 element.

b) Ange en ring R sådan att $U(R)$ inte är en abelsk, dvs inte är en kommutativ grupp.

En kortfattad motivering krävs till både a) och b) uppgiften.

Lösning
a) Z_{37} är en ring där varje element utom nollan är relativt primt till 37 eftersom 37 är ett primtal. I en ring Z_n gäller allmänt att elementet a är inverterbart precis då det är relativt primt till n. Ringen Z_{37} har alltså precis 36 inverterbara element.
b) Mängden av alla 2×2-matriser över de reella talen utgör en ring. Multiplikativa gruppen består av de inverterbara matriserna. Följande två matriser A och B är inverterbara och $AB \neq BA$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$