Lappskrivning nummer 4A till kursen Diskret matematik för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 31 mars 2009, kl 08.15-08.40.

Namn: Olof Heden

Resultat: 2p

1. Bestäm en delgrupp (undergrupp eller "subgroup") H till gruppen $G = (Z_{15}, +)$ sådan att

$$|H \cap \{3, 4\}| = 1.$$

Lösning Vi undersöker den cykliska delgrupp som genereras av elementet 3 och finner att

$$< 3 >= \{3, 3 + 3 = 6, 3 + 3 + 3 = 9, 3 + 3 + 3 + 3 = 12, 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 0\}.$$

Detta är en delgrupp till G som innehåller elementet 3 men inte elementet 4 och alltså duger som svar.

2. Betrakta gruppen $G = (Z_{15}, +)$. Bestäm samtliga sidoklasser ("cosets") S till delgrupper (undergrupper eller "subgroups") H till G sådana att

$$|S \cap \{3, 4, 7\}| = 2.$$

(Glöm ej att motivera att det inte finns fler sidoklasser utöver den eller de sidoklasser du har hittat.)
Lösning Låt H vara en möjlig delgrupp. Det finns tre möjlig snitt med den givna mängden

$$S_1 \cap \{3, 4, 7\} = \{3, 4\} \subseteq a + H_1 = S_1,$$

eller

$$S_2 \cap \{3, 4, 7\} = \{3, 7\} \subseteq b + H_2 = S_2,$$

eller

$$S_3 \cap \{3, 4, 7\} = \{4, 7\} \subseteq c + H_3 = S_3,$$

för några element a, b och c i G.

I första fallet finner vi att om 3 och 4 tillhör sidoklssen så finns element h och h' i H_1 sådana att

$$a + h = 3 \qquad a + h' = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad h' - h = 4 - 3 = 1,$$

och elementet 1 skulle tillhöra H_1 eftersom h och h' tillhör H_1. Men 1 genererar G så då skulle $G = H = a + H$ och även elementet 7 skulle tillhöra sidoklassen.

I andra fallet ger samma räkningar att elementet 4 skulle tillhöra H_2. Men då tillhör även elementet $4 + 4 + 4 + 4 = 1$ delgruppen H_2 och återigen då 1 genererar G så skulle $H_2 = G$ och den enda sidoklassen till H_2 skulle även innehålla elementet 4.

På samma sätt ser vi att i sista fallet så måste elementet 3 tillhöra delgruppen H_3 samt samtliga element som kan fås som "potenser" av elementet 3, dvs samtliga element i den i uppgift 1 funna delgruppen $< 3 >$ med fem element. Delgruppen H_3 skulle ha $< 3 >$ som delgrupp och antalet element i H_3 skulle vara en multipel av antalet element i $< 3 >$ dvs en multiplel av 5. Dessutom skulle antalet element i H_3 dela antalet element i G dvs dela talet 15. Enda möjligheten om $H_3 \neq G$ är alltså att $H_3 =< 3 >$. Sidoklasser till H_3 är

$$H_3 =< 3 >= \{0, 3, 6, 9, 12\}, \qquad 1 + H_3 = \{1, 4, 7, 10, 13\}, \qquad 2 + H_3 = \{2, 5, 8, 11, 14\}.$$

Enda möjliga sidoklassen är alltså

SVAR: $\{1, 4, 7, 10, 13\}$