Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 15 mars 2010 kl 14.00-19.00.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen under vt08 adderas till skrivningspoängen.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Bestäm den största gemensamma delaren till de bägge talen 757 och 908.

   Lösning: Euklides algoritm ger

$$\begin{array}{rcrcr} 908 & = & 757 & + & 151 \\ 757 & = & 5 \cdot 151 & + & 2 \\ 151 & = & 75 \cdot 2 & + & 1 \end{array}$$

   Sista ickeförsvinnande resten är 1 så

   Svar: Den största gemensamma delaren är 1.

2. (3p) Lös rekursionsekvationen

$$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}\ , \qquad n = 2, 3, \dots\ ,$$

   med startvärdena $a_0 = 0$ och $a_1 = -3$.

   Lösning: Rekursionsekvationens karakteristiska ekvation

$$r^2 = 7r - 10\ ,$$

   har rötterna $r = 2$ och $r = 5$. Så allmän lösning är

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 5^n\ .$$

Anpassning tillbegynnelsevärdena ger

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 0 \\ 2A & + & 5B & = & -3 \end{array}\right.$$

varur $A = 1$ och $B = -1$ erhålles.

Svar: $a_n = 2^n - 5^n$.

3. (a) (1p) Ange det kromatiska talet för den komletta bipartita grafen $K_{452,341}$.

   Lösning: Alla bipartita grafer med minst en kant har kromatiska talet 2, så
   Svar: 2.

   (b) (2p) Rita en graf, utan multipla kanter och loopar, med 7 noder och vars kromatiska tal är 4.

   Lösning: Rita tll exempel en komplett graf K_4 med fyranoder samt två isolerade noder, dvs med valensen ett.

4. (3p) Är nedanstående två summor, när de summeras ihop, lika eller olika:

$$\sum_{k=0}^{120} 17^k \cdot 12^{120-k}\binom{120}{k}, \qquad \text{resp,} \qquad \sum_{k=0}^{120} 3^k \cdot 26^{120-k}\binom{120}{120-k} .$$

Lösning: Ja eftersom den första summan är $(17+19)^{120} = 29^{120}$ och den andra summan är $(3+26)^{120} = 29^{120}$.

5. (3p) Bestäm antalet tal $1 \leq n \leq 700$ som inte delas av något av talen 2, 5 eller 7.

Lösning: Vi konstaterar att $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ så ett tal mellan 1 och 700 som inte delas av något av talen 2, 5 eller 7 måste sakna gemensam delare med talet 700, dvs vara relativt primt till 700. Antalet tal mellan 1 och 700 som är relativt prima med 700 ges av Eulers φ-funktion, som vi enligt formel i detta fall får till

$$\varphi(700) = 700(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7}) = 240 .$$

Alternativt kan man använda inklusion exklusion.

DEL II

6. (3p) Låt $\varphi(n)$ beteckna antalet hela tal $1 \leq m \leq n$ som är relativt prima med n. Definiera en funktion $\psi(n)$ genom

$$\psi(n) = \frac{\varphi(n^2)}{\varphi(n)} .$$

Härled ett explicit uttryck för $\psi(n)$.

Lösning: Talet n och n^2 har primtalsfaktoriseringar

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k} , \qquad n^2 = p_1^{2e_1} p_2^{2e_2} \dots p_k^{2e_k} ,$$

där p_1, p_2, ..., p_k är olika primtal och alla tal e_i är positiv heltal. Vi finner då att

$$\psi(n) = \frac{\varphi(n^2)}{\varphi(n)} = \frac{n^2 \cdot \Pi_{i=1}^k (1-\frac{1}{p_i})}{n \cdot \Pi_{i=1}^k (1-\frac{1}{p_i})} = \frac{n^2}{n} = n .$$

7. (3p) Kan det finnas någon sammanhängande planär graf vars alla noder har en valens (grad) större än fyra och alla cykler i grafen har en längd minst lika med fyra.

   Lösning: Låt e beteckna antalet kanter, v antalet noder, och r antalet områden som uppstår vid en plan ritning av grafen. Det kan finnas kanter som bara gränsar till ett område, en så kallad *bro*. Varje gång en sådan kant tas bort ökar antalet komponenter med 1. Låt b beteckna antalet sådana kanter.

   Eftersom alla noder har en valens större än fyra så ger sambandet mellan summan av alla valenser och antalet noder att

   $$e > 2v \ .$$

   Vi tar nu bort broarna och får, emedan cyklerna fortfarande har en längd av minst fyra, att

   $$2(e - b) \geq 4r \ ,$$

   och att antalet komponenter är $c = b + 1$.

   Vi tillämpar nu Eulers formel på det som återstår av grafen sedan broarna avlägsnats:

   $$e + 2 = e - b + b + 1 + 1 = e - b + c + 1 = v + r < e/2 + e/2 - b/2 = e - b/2 \ ,$$

   vilket ju är orimligt.

   Svar: Nej.

8. Låt $\mathcal{S}_8$ beteckna mängden av permutationer på mängden $\{1, 2, \ldots, 8\}$, och låt ψ och φ beteckna permutationerna (cykelnotation)

   $$\psi = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7) \ , \qquad \varphi = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) \ .$$

   (a) (1p) Bestäm en permutation $\gamma \in \mathcal{S}_8$ sådan att

   $$\gamma\psi = \varphi \ .$$

   Lösning: Vi finner att

   $$\gamma = \varphi\psi^{-1} = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)(4\ 3\ 2\ 1)(7\ 6\ 5) = (1\ 6)(2\ 3\ 4\ 5\ 7) \ .$$

   (b) (2p) Varför finns det ingen permutation $\gamma \in \mathcal{S}_8$ sådan att

   $$\gamma\psi\gamma = \varphi\gamma^2 \ ?$$

   Lösning: Då skulle

   $$\gamma\psi\gamma^{-1} = \varphi \ ,$$

   och ψ och φ skulle vara konjugerade. Men de är av olika typ och kan då inte vara konjugerade.

   (c) (2p) Finns det någon permutation $\gamma \neq (1)$ sådan att

   $$\gamma\psi\gamma^{-1} = \psi \ ?$$

   Lösning: Detta skulle innebära tt $\gamma\psi = \psi\gamma$. Men tag till exempel

   $$\gamma = \psi^{-1} \ ,$$

   så är ju detta uppfyllt.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. (a) (1p) Bestäm antalet ekvivalensrelationer på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ sådana att 1 inte är ekvivalent med 2.

   Lösning: Varje ekvivalensrelation svarar unikt mot en uppdelning i ekvivalensklasser. Vi får följnde uppdelningar Fyra ekvivalensklasser:

   $$\{1\}\ , \{2\}\ , \{3\}\ , \{4\}\ ,$$

   Tre ekvivalenskalsser

   $$\{1\}\ , \{2\}\ , \{3, 4\}\ ,$$

   eller

   $$\{1, 4\}\ , \{2\}\ , \{3\}\ ,$$
   $$\{1, 3\}\ , \{2\}\ , \{4\}\ ,$$
   $$\{1\}\ , \{2, 4\}\ , \{3\}\ ,$$
   $$\{1\}\ , \{2, 3\}\ , \{4\}\ ,$$

   Vid två ekvivalensklasser har vi att fördela elementen 3 och 4 på delmängderna med elementen 1 och 2. Så totalt finns det $2^2 = 4$ ekvivalensrelationer som ger upphov till två ekvivalensklasser.
   Svar: 10 olika ekvivalensrelationer.

   (b) (4p) Bestäm antalet ekvivalensrelationer på mängden $\{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ sådana att 1 inte är ekvivalent med 2.

   Lösning: Varje ekvivalensrelation svarar unikt mot en uppdelning av givna mängden i disjunkta ekvivalensklasser. Svaret ges då av uttrycket

   $$N = S(7,1)+S(7,2)+\cdots+S(7,6)+S(7,7)-(S(6,1)+S(6,2)+\cdots+S(6,5)+S(6,6))\ ,$$

   eftersom vi måste dra i från de fall när 1 och 2 betraktas som samma element.
   Vi använder rekursionen $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$ för att skriva upp "Stirlings triangel" varur vi hämtar talen nödvändiga för att beräkna summan ovan. Vi får tillslut att det sökta talet N blir

   $$N = 1 + 63 + 301 + 350 + 140 + 21 + 1 - (1 + 31 + 90 + 65 + 15 + 1) = 674\ .$$

10. (a) (2p) Visa att om för de tre talen x, y och z gäller att

   $$x^3 + y^3 = z^3\ ,$$

   så delar talet 7 minst ett av dessa tre tal.

   Lösning: Vi bestämmer alla 3-potenser i ringen Z_7, och finner

   $$0^3 = 0,\ 1^3 = 1,\ 2^3 = 1,\ 3^3 = 6, z; 4^3 = (-3)^3 = -6 = 1,$$

   $$5^3 = (-2)^3 = -1 - 6,\ 6^3 = (-1)^3 = -1 = 6\ .$$

Så 3-potenserna är $0, 1, 6$. Vi studerar nu den givna diofantiska ekvationen modulo talet 7, och ser att

$$x^3 + y^3 \equiv_7 z^3$$

endast är möjlig i två fall. Antingen $x^3 \equiv_7 1$ och $y^3 \equiv_7 6$ eller vice versa och $z^3 \equiv_7 0$ eller att endera x^3 eller y^3 är ekvivalent med 0 modulo 7. Men om 7 delar ett tal w^3 så måste 7 dela talet w.

(b) (3p) Bestäm, och ange på ett lämpligt sätt, samtliga heltalstripplar (x, y, z) sådana att talet 37 inte delar något av talen x, y eller z men ändå

$$x^3 + y^3 \equiv z^3 \pmod{37} .$$

Lösning: Om (x, y, z) är en lösning så kommer $(x(\text{mod } 37), y(\text{mod } 37), z(\text{mod } 37))$ att vara en lösning i ringen Z_{37}. Vi börjar med att studera den givna ekvationen i denna ring. Vidare, om (x, y, z) är en lösning så kommer även (rx, ry, rz) att vara en lösning. Eftersom alla element i Z_{37} är inverterbara räcker det i princip att hitta alla lösningar av endera typerna $(0, 0, 0)$, $(0, 1, z)$ resp $(1, y, z)$ och sedan multiplicera med ett ringelement r för att få samtliga lösningar.

Fall 1. Typen $(0, 0, 0)$ löser ekvationen och svarar mot heltalslösningen

$$(x, y, z) = (37n, 37m, 37k) ,$$

där n, m och k är godtyckliga heltal.

Fall 2. Typen $(0, 1, z)$, ger då $0^3 + 1^3 = 1$ att vi behöver reda ut vilka element i Z_{37} som har en trepotens som är lika med 1. Vi finner generellt följande, med $T_i = \{r \in Z_{37} \mid r^3 = i\}$,

$$\begin{aligned}
T_1 &= \{1, 10, 26\} \\
T_6 &= \{28, 25, 21\} \\
T_8 &= \{2, 15, 20\} \\
T_{10} &= \{7, 33, 34\} \\
T_{11} &= \{21, 25, 28\} \\
T_{14} &= \{5, 13, 18\} \\
T_{23} &= \{19, 24, 32\} \\
T_{26} &= \{9, 12, 16\} \\
T_{27} &= \{3, 4, 30\} \\
T_{29} &= \{17, 22, 35\} \\
T_{31} &= \{6, 8, 23\} \\
T_{36} &= \{11, 27, 36\}
\end{aligned}$$

Detta ger att i fall 2 får vi lösningarna

$$(x, y, z) \in \{(37n, r + 37m, rc + 37k) \mid c \in \{1, 10, 26\}$$

och $r = 1, 2, 3, \ldots, 36$.

Tillslut i fall 3 får vi lösningarna, då t ex i ringen Z_{37} gäller att $1 + 0 = 1$, $1 + 10 = 11$, $1 + 26 = 27$ samt givetvis $1 + 36 = 0$. Vi får lösningarna

$$(x, y, z) \in \{(r + 37n, 37m, rc + 37k) \mid \ c \in T_1\}$$

$$(x, y, z) \in \{(r + 37n, rb + 37m, rc + 37k) \mid b \in T_{10},\ c \in T_{11}\}$$

$$(x, y, z) \in \{(r + 37n, rb + 37m, rc + 37k) \mid b \in T_{26},\ c \in T_{27}\}$$

eller

$$(x, y, z) \in \{(r + 37n, rb + 37m, 37k) \mid b \in T_{36},\ c = 0\}$$

och $r = 1, 2, 3, \ldots, 36$.