Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 7 juni 2011 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden, tel. 0730547891.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 35p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Vid denna tenta är det inte aktuellt med några bonuspoäng

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Bestäm den minsta positiva resten vid division av talet 7^{1024} med talet 31.

   Lösning: Vi använder Fermats lilla sats, dvs att om p är ett primtal som inte delar heltalet a så gäller att
   $$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} ,$$
   och att $1024 = 34 \cdot 30 + 4$:
   $$7^{1024} \equiv_{31} (7^{30})^{34} 7^4 \equiv_{31} 7^4 \equiv_{31} 7^2 7^2 \equiv_{31} (-13) \cdot (-13) \equiv_{31} 169 \equiv_{31} 14 .$$

   SVAR: 14.

2. (3p) Lös rekursionsekvationen
   $$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} , \qquad n = 2, 3, \dots ,$$
   med begynnelsevärdena $a_0 = 2$ och $a_1 = -1$.

   Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2 = 5r - 6$ har rötterna $r = 2$ och $r = 3$ så den allmänna lösningen till givna rekursionsekvationen är
   $$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n .$$
   Med de givna begynnelsevärdena får vi
   $$\begin{cases} a_0 &= 2 \\ a_1 &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B &= 2 \\ 2A + 3B &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 7 \\ B &= -5 \end{cases}$$

   SVAR: $a_n = 7 \cdot 2^n - 5 \cdot 3^n$.

3. (3p) Rita tre grafer G_1, G_2 och G_3, samtliga med 12 noder och 18 kanter och sådana att,

   (i) G_1 har en Eulerkrets men ingen Hamiltoncykel.

   (ii) G_2 har en Hamiltoncykel men ingen Eulerkrets.

   (iii) G_3 har varken en Eulerkrets eller en Hamiltoncykel.

   Lösning: Rita först fyra parallella kanter mellan noderna a och b. Rita sedan ut de 10 övriga noderna på dessa fyra kanter, minst två noder på var och en av dessa fyra kanter och precis tre noder på två av kanterna. Låt x och y vara noder som varken är grannar med a eller b. Varje gång du ritar en sådan nod uppstår en ny kant, så totalt har vi nu 14 kanter. Rita nu ytterligare fyra kanter, två från noden a till x resp y och två från b till x och y. Nu har du ritat en graf som uppfyller kraven på grafen G_1, eftersom alla noder har jämn valens, och t ex noden a måste passeras mer än en gång om man skall följa en rutt som besöker alla noder.

   Rita en cykelgraf med 12 noder a_1, a_2, ..., a_{12}. Hur du än sen fyller i med kanter kommer denna cykel att vara en Hamiltoncykel i grafen eftersom den innehåller alla noder. Från noden a_1 ritar du nu ut kanter till noderna a_3, a_4, ..., a_8. Nu har grafen 18 kanter och 12 noder men det finns noder med udda valens, t ex a_3, så ingen Eulerkrets kan finnas. Grafen uppfyller kraven på grafen G_2.

   En osammanhängade graf har varken en Eulerkrets eller en Hamiltoncykel, så rita en sådan graf så har du G_3.

4. (3p) På hur många olika sätt kan mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ delas in i tre delmängder så att elementen 1, 2 och 3 hamnar i olika mängder.

   Lösning: Placera ut elementen 1, 2 och 3 i varsina delmängder. Detta går att göra på ett sätt eftersom mängderna är oetiketterade. Då uppstår tre etiketterade mängder, mängden med elementet 1, mängden med elementet 2 och mängden med elementet 3. Resterande sju element skall placeras i tre etiketterade delmängder och inga restriktioner finns, så totalt blir antalet möjligheter för detta

   SVAR: 3^7.

5. (a) (1p) Låt A beteckna en mängd positiva hela tal. Ge en vettig definition av begreppet största gemensamma delaren, nedan betecknad $\text{sgd}(A)$, till talen i mängden A.

   Lösning: Det ickenegativa heltalet D är den största gemensamma delaren till talen i mängden A om följande två villkor är uppfyllda

   (i) D delar samtliga tal i mängden A.

   (ii) om heltalet d delar samtliga tal i mängden A så gäller att d delar D.

   (b) (2p) Visa att för varje icketom delmängd B till A så gäller att $\text{sgd}(A)$ delar $\text{sgd}(B)$.

   Lösning: I uppgiften ingick inte att diskutera huruvida $D = \text{sgd}(A)$ resp $D' = \text{sgd}(B)$ alltid existerar, så vi utgår ifrån att så är fallet.

Enligt kravet (i) så delar D alla tal i A och kommer då att dela alla tal i B, eftersom alla tal i B finns i A. Enligt kravet (ii) på sgd(B) måste då D vara en delare till till $D' = \text{sgd}(B)$, vilket skulle visas.

DEL II

6. (3p) Visa att det inte finns någon planär sammanhängande graf med 8 noder med valenserna 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, och respektive 10.

   Lösning: Summan av alla valenser är $3 + 4 + \ldots + 10 = 52$ så antalet kanter är 26. Men i varje planär sammanhängande grafer gäller följande olikhet mellan antalet kanter e och antalet noder v:
$$e \leq 3v - 6\ ,$$
   så då $26 > 3 \cdot 8 - 2$ har vi visat det vi skulle visa.

7. (3p) Bestäm antalet hela tal mellan 1 och 1320 som inte är delbara med något av talen 10, 11 eller 12.

   Lösning: Vi kommer att använda principen om inklusion exklusion och för den skull definierar vi mängderna A, B och C som består av de hela tal mellan 1 och 320 som är delbara med 10, 11 resp. 12. Svaret S ges då av
$$S = 1320 - |A \cup B \cup C|\ .$$
   Vi finner
$$\begin{array}{rcccl} |A| & = & \frac{1320}{10} & = & 132 \\ |B| & = & \frac{1320}{11} & = & 120 \\ |C| & = & \frac{1320}{12} & = & 110 \\ |A \cap B| & = & \frac{1320}{\text{mgm}(10,11)} & = & 12 \\ |A \cap C| & = & \frac{1320}{\text{mgm}(10,12)} & = & 22 \\ |B \cap C| & = & \frac{1320}{\text{mgm}(11,12)} & = & 10 \\ |A \cap B \cap C| & = & \frac{1320}{\text{mgm}(10,11,12)} & = & 2 \end{array}$$
   Formeln för inklusion exklusion
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
   ger nu

   SVAR: $1320 - 132 - 120 - 110 + 12 + 22 + 10 - 2 = 1000$.

8. (4p) Lös ekvationen $x^2 + 11x + 2 = 0$ i ringen Z_{315}.

   Lösning: Vi planerar att använda kinesiska restsatsen i lösandet av den givna ekvationen, och konstaterar då att Z_{315} är isomorf med den direkta produkten $Z_5 \times Z_7 \times Z_9$ av ringarna Z_5, Z_7 och Z_9. Vi löser nu ekvationen i dessa ringar.

I ringen Z_5 kan ekvationen skrivas $x^2 + x + 2 = 0$ (eftersom $11 \equiv 1 \pmod 5$) och medelst prövning finner vi att

$$\begin{array}{rcccc} 0^2+0+2 & = & 2 & \neq & 0 \\ 1^2+1+2 & = & 4 & \neq & 0 \\ 2^2+2+2 & = & 3 & \neq & 0 \\ 3^2+3+2 & = & 4 & \neq & 0 \\ 4^2+4+2 & = & 2 & \neq & 0 \end{array}$$

så ingen lösning finnes här i denna ring och därmed ingen lösning i den givna ringen heller (och vi behöver inte lösa ekvationen i de andra två ringarna).

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. I denna uppgift betecknar $\mathcal{S}_n$ mängden av samtliga permutationer på mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Permutationerna α och β säges kommutera om $\alpha\beta = \beta\alpha$.

   (a) (1p) Bestäm samtliga permutationer β i $\mathcal{S}_3$ som kommuterar med permutationen $\alpha = (1\ 2\ 3)$.

   Lösning: Mängden $\mathcal{S}_3$ har de sex elementen (1), (1 2), (1 3), (2 3), (1 2 3) och (1 3 2), och det är lätt att genom kontroll finna
   SVAR: Endast (1), (1 2 3) och (1 3 2) kommuterar med (1 2 3).

   (b) (1p) Bestäm fem olika permutationer i $\mathcal{S}_5$ som kommuterar med permutationen $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

   Lösning: Eftersom $\alpha \cdot \alpha^k = \alpha^{k+1} = \alpha^k \cdot \alpha$ har vi omdelbart
   SVAR: α, α^2, α^3, α^4 och $\alpha^5 = (1)$.

   (c) (3p) Låt α vara en permutation i $\mathcal{S}_n$ och antag att α utgör en cykel av längd n, dvs

   $$\alpha = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$$

   där a_1, a_2, ..., a_n är n stycken olika element i mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bestäm antalet permutationer i $\mathcal{S}_n$ som kommuterar med α

   Lösning: Vi konstaterar först att som ovan har vi att de n olika permutationerna α^k, för $k = 1, 2, \ldots, n$, kommuterar med α.
   Om $\beta\alpha = \alpha\beta$ så gäller att $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha$. Vi kan anta att $\alpha = (1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$. Då $\alpha(i) = i + 1 \pmod n$ har vi att

   $$\beta(i) = j \;\Rightarrow\; \beta(i+1) = \beta(\alpha(i)) = \beta(\alpha(\beta^{-1}(j))) = \beta\alpha\beta^{-1}(j) = \alpha(j) = j + 1\ .$$

   Ur implikationen ovan följer rekursivt att värdet på $\beta(i)$ är bestämt av värdet på $\beta(1)$. Det finns högst n olika möjliga värden på $\beta(1)$ och alltså finns det inte fler än n olika permutationer som kommuterar med α.
   Sammanfattningsvis har vi alltså
   SVAR: Det finns precis n olika permutationer som kommuterar med α.

10. Nedan betraktar vi bipartita grafer med noder i mängderna X och Y och där inga kanter finns mellan noder i X och inga kanter mellan noder i Y.

(a) (2p) Visa att om $|X| \leq 10$, om noderna i X har grad (valens) minst lika med 4, och om noderna i Y har grad (valens) högst lika med 5 så finns alltid en matchning av en storlek minst lika med 8.

Lösning: Se nedan!

(b) (3p) Formulera och bevisa en sats som generaliserar situationen ovan och varur resultatet i deluppgiften ovan följer.

Lösning: Let $\delta(v)$ denote the degree of the vertex v. Let $G(X \cup Y, E)$ denote a bipartite graph as described above, and with the set of edges E. Let, for every real number r, $\lfloor r \rfloor$ denote the largest integer k such that $k \leq r$.

Theorem 1 *In every bipartite graph $G(X \cup Y, E)$ such that for every $x \in X$ and $y \in Y$*

$$\delta(y) \leq M \leq m \leq \delta(x)$$

where m and M are integers, there exists a matching $\mathcal{M}$ of size

$$|\mathcal{M}| = \lfloor \frac{m}{M} |X| \rfloor \ .$$

Proof. Let $J(A)$ denote the joint in Y to the vertices in the subset A of X. Due to a theorem in the textbook it is sufficient to prove that for every subset A of X it is true that

$$|A| - |J(A)| \leq \Delta \ ,$$

where

$$\Delta = |X| - \lfloor \frac{m}{M} |X| \rfloor \ .$$

Let $N(A)$ denote the number of edges that are incident with a vertex in the subset A of X. Then, by counting the number of edges that are incident with a vertex in the subset $J(A)$ of Y we get that

$$m|A| \leq N(A) \leq M|J(A)| \ ,$$

and so

$$|J(A)| \geq \frac{m}{M} |A| \ ,$$

It follows that, for every subset A of X,

$$|A| - |J(A)| \leq |A| - \frac{m}{M}|A| = |A|(1 - \frac{m}{M}) \leq |X|(1 - \frac{m}{M}) \leq |X| - \lfloor \frac{m}{M} |X| \rfloor \ .$$

Example. Every bipartite graph $G(X \cup Y, E)$ such that $|X| = 10$, $m = 4$ and $M = 5$ admits a matching $\mathcal{M}$ of size

$$|\mathcal{M}| = \lfloor \frac{4}{5} 10 \rfloor = 8 \ .$$

Anm. Du kan få 5p på uppgift 10 genom att lösa (b)-uppgiften först och sedan visa hur resultatet i (a) följer av lösningen till uppgift (b).