Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 10 januari 2011 kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden, tel. 0730547891.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Vid denna tenta är det inte aktuellt med några bonuspoäng

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Bestäm hela tal n och m sådana att

$$314n + 2187m = 1 \ .$$

Lösning: Vi kommer att utnyttja Euklides algoritm för bestämmning av sgd$(314, 2187)$:

$$\begin{aligned} 2187 &= 7 \cdot 314 - 11 \\ 314 &= 29 \cdot 11 - 5 \\ 11 &= 2 \cdot 5 + 1 \end{aligned}$$

Ur denna algoritm läser vi ut att

$$1 = 11 - 2 \cdot 5 = 11 - 2(29 \cdot 11 - 314) = -47 \cdot 11 + 2 \cdot 314 =$$

$$= -47(7 \cdot 314 - 2187) + 2 \cdot 314$$

och därmed

$$1 = 47 \cdot 2187 - 327 \cdot 314 \ .$$

SVAR: Till exempel $(n, m) = (-327, 47)$.

2. (3p) Lös rekursionsekvationen

$$a_n = -3a_{n-1} + 10a_{n-2} \ , \qquad a_0 = 5, \ a_1 = -4 \ .$$

Lösning: Rekursionsekvationens karakteristiska ekvation

$$r^2 = -3r + 10$$

har rötterna $r = -5$ och $r = 2$. Så en allmän lösning till ekvationen är

$$a_n = A2^n + B(-5)^n \ .$$

Vi anpassar nu till begynnelsevärdena vilka ger systemet

$$\begin{cases} A & + & B & = & 5 \\ 2A & - & 5B & = & -4 \end{cases}$$

som har lösningen $A = 3$ och $B = 2$.

SVAR: $a_n = 3 \cdot 2^n + 2(-5^n)$

3. (3p) Låt φ och ψ beteckna nedanstående två permutationer på mängden $\{1, 2, \ldots, 7\}$:

$$\varphi = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7) \ , \quad \psi = (1\ 3)(6\ 5\ 7)(4\ 2) \ .$$

Bestäm en permutation γ sådan att

$$\varphi^3 \gamma = \psi^3 \ .$$

Lösning: Då $\varphi^3 = (1\ 4\ 3\ 2)$ har inversen $(1\ 2\ 3\ 4)$ och då $\psi^3 = (1\ 3)(4\ 2)$ får vi

$$\gamma = (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 3)(4\ 2) = (1\ 4\ 3\ 2) \ .$$

4. (3p) Beräkna

$$\binom{23}{20} + \binom{23}{21} + \binom{24}{22} \ .$$

Lösning: Enligt en känd rekursionsformel för binomialkoefficienter får vi

$$\binom{23}{20}+\binom{23}{21}+\binom{24}{22}=\binom{24}{21}+\binom{24}{22}=\binom{25}{22}$$

som ju kan beräknas på följande sätt

$$\binom{25}{22}=\binom{25}{3}=\frac{25\cdot 24\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3}=25\cdot 4\cdot 23=100\cdot 23=2300.$$

SVAR: 2300.

5. (3p) Ge en förklaring till varför varje graf som har minst en kant men som saknar noder av valens ett måste ha minst en cykel.

   Lösning: Varje träd har kanter av valens 1, så grafen i fråga kan varken vara ett träd eller en skog. Var och en av grafens komponenter måste då ha en cykel.

DEL II

6. (3p) Visa att om en graf G med n noder har kromatiska talet $\chi(G)=n$ så måste antalet kanter i G vara minst lika med $n(n-1)/2$.

   Lösning: Vi färglägger grafens n noder i tur och ordning med Greedy algoritmen. Eftersom alla n färger måste komma till användning så måste i varje steg en ny ej redan använd färg användas, ty annars skulle resterande noder kunna färgas med egna färger och det skulle åtgå färre än n färger. Eftersom alltid en oanvänd färg måste användas i varje steg vid Greedy algoritmen är varje nod granne med alla tidigare färgade noder. I slutändan innebär detta att varje par av noder är grannar med varandra. Det finns totalt $\binom{n}{2}$ stycken par.

7. (4p) En klass bestående av 11 flickor och 13 pojkar skall ställa upp sig i fyra lika långa led. Hur många olika sådana leduppställningar kan man bilda om ett krav är att varje led skall innehålla minst en pojke och minst en flicka. (Obs: Leden är inte etiketterade, men varje led har en bestämd riktning, dvs någon står först resp sist.)

   Lösning: Leden är oetiketterade, men det finns $3!=6$ olika sätt att sätta etiketter på leden, så i syfte att förenkla beräkningarna utgår vi ifrån att leden är etiketterade och delar sedan det svar vi då får med 6. Vi kallar leden för led 1, led 2, led 3 och led 4.

Totalt, utan kravet att varje led skall innehåla minst en flicka och minst en pojke så finns det, eftersom leden är lika långa, dvs av längd 6,

$$\binom{24}{6,6,6,6}$$

olika sätt att välja medlemmar till de olika (obs etiketterade) leden. Antalet sätt att ordna varje led ï 6!, så utan några krav på delika långa ledn finns det

$$6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot \binom{24}{6,6,6,6}$$

olika leduppställningar.

Vi använder nu principen om inklusion exklusion för att beräkna hur många led som inte duger.

Låt A_i beteckna de leduppställningar när led nummer i saknar en pojke och B_i de leduppställningar när led nummer i saknar en flicka.

Vi finner att

$$|A_i| = 6!^4 \binom{11}{6}\binom{18}{6,6,6}\,, \qquad |B_i| = 6!^4 \binom{13}{6}\binom{18}{6,6,6}$$

där den första faktorn ger antalet sätt att välja 6 flickor (resp pojkar) tillled nummer i. Med totalt bara 11 flickr kan vi inte ha två led som bara består av flickor, så

$$|A_i \cap A_j| = 0 \qquad \text{för} \qquad i \neq j\,.$$

Men eftersom det totalt finns 13 pojkar har vi

$$|B_i \cap B_j| = 6!^4 \binom{13}{6,6,1}\binom{12}{6,6}$$

sätt att skapa leden i och j bestående av bara pojkar. Brist på pojkar gör att vi ej kan skapa tre led med enbart flickor. Varje led måste innehålla flickor och/eller pojkar, men led i kan beståav bara pojkar och led j av bara flickor. Vi får att antalet möjligeher för detta är

$$|B_i \cap A_j| = 6!^4 \binom{11}{6}\binom{13}{6}\binom{12}{6,6}\,.$$

En sista möjlighet finns kavar att betrakta, två rena pojkled och ett rent flickled:

$$|A_i \cap B_j \cap B_k| = 6!^4 \binom{11}{6}\binom{13}{6,6}\,.$$

Formeln för inklusion exklusion ger nu

SVAR:

$$\frac{6!^4}{3!}(\binom{24}{6,6,6,6} - 4(\binom{11}{6}\binom{18}{6,6,6} + \binom{13}{6}\binom{18}{6,6,6})+$$

$$\binom{4}{2}\binom{13}{6,6,1}\binom{12}{6,6} + \binom{4}{2}\binom{11}{6}\binom{13}{6}\binom{12}{6,6} - \binom{4}{3}\binom{11}{6}\binom{13}{6,6}) \; .$$

8. (4p) Bestäm antalet ekvivalensrelationer på mängden $\{1, 2, \ldots, 6\}$ som har egenskapen att elementen 1 och 2 hamnar i olika ekvivalensklasser.

Lösning: Varje ekvivalens relation på en mängd M svarar entydigt mot en partition av M i parvis disjunkta ekvivalensklasser. Vi vet att antalet sätt att dela in en mängd med n element i k stycken icketomma delmängder ges av Stirlingtalet $S(n, k)$. Så antalet ekvivalensrelationer på en mängd med 6 element blir då lika med

$$a = S(6, 1) + S(6, 2) + S(6, 3) + S(6, 4) + S(6, 5) + S(6, 6) \; .$$

I kravspecifiktionen i uppgiften antas att 1 och 2 skall tillhöra olika ekvivalensklasser. Så svaret ges alltså av $a - b$ där b är antalet ekvivalensrelationer där 1 och 2 hamnar i samma ekvivalensklass. Vi låter alltså dessa två element hålla ihop, och kan betrakta dem som en enhet. Talet b ges nu av summan av antalet sätt att dela in mängden $\{12, 3, 4, 5, 6\}$ i k olika delmängder, för $k = 1, 2, 3, 4, 5$, dvs

$$b = S(5, 1) + S(5, 2) + S(5, 3) + S(5, 4) + S(5, 5) \; .$$

. Vi använder nu rekursionen $S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$, och finner att

$$\begin{aligned}
S(3,2) &= S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 = 3 \\
S(4,2) &= S(3,1) + 2S(3,2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \\
S(4,3) &= S(3,2) + 3S(3,3) = 3 + 3 \cdot 1 = 6 \\
S(5,2) &= S(4,1) + 2S(4,2) = 1 + 2 \cdot 7 = 15 \\
S(5,3) &= S(4,2) + 3S(4,3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25 \\
S(5,4) &= S(4,3) + 4S(4,4) = 6 + 4 \cdot 1 = 10 \\
S(6,2) &= S(5,1) + 2S(5,2) = 1 + 2 \cdot 15 = 31 \\
S(6,3) &= S(5,2) + 3S(5,3) = 15 + 3 \cdot 25 = 90 \\
S(6,4) &= S(5,3) + 4S(5,4) = 25 + 4 \cdot 10 = 65 \\
S(6,5) &= S(5,4) + 5S(5,5) = 10 + 5 \cdot 1 = 15
\end{aligned}$$

Eftersom $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ får vi nu svaret

SVAR: $1 + 31 + 90 + 65 + 15 + 1 - (1 + 15 + 25 + 10 + 1) = 151$.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. (a) (2p) Bestäm antalet lösningar till ekvationen $x^2 = 1$ i ringen Z_{1800}.

Lösning: Eftersom $1800 = 2^8 3^2 5^2$ så, enligt kinesiska restsatsen, och det som hör därtill, ges antalet lösningar till den givan ekvationen av antalet 3-tipplar (x_1, x_2, x_3) sådana att

$$\begin{aligned} x_1^2 &\equiv 1 \pmod 8 , \\ x_2^2 &\equiv 1 \pmod 9 , \\ x_3^2 &\equiv 1 \pmod{25} . \end{aligned}$$

Inspektion ger att den första kongruensen har lösningarna $x_1 = \pm 1, \pm 3$, dvs fyra olika lösningar, medan de bägge andra kongruenserna endast har lösningarna $x_2 = \pm 1$ och $x_3 = \pm 1$. Således

SVAR: $4 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

(b) (3p) Låt n vara ett positivt heltal. Härled ett uttryck för antalet rötter till ekvationen $x^2 = 1$ i ringen Z_n.

Lösning: Inspirerade av föregående uppgift under söker vi nu antalet lösningar till ekvationen $x^2 = 1$ i ringar Z_{p^k} där p är ett primtal.

Fall 1: $p \geq 3$. Eftersom $x^2 = 1$ alltid ekvivalent kan uttryckas som att $(x-1)(x+1) = 0$ har vi att

$$x^2 \equiv 1 \pmod{p^k} \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) \equiv 0 \pmod{p^k} . \qquad (1)$$

Detta är ekvivalent med att om r faktorer av p dyker upp i en primtalsfaktorisering av $(x-1)$ så måste minst $s = k - r$ faktorer av p dyka upp i en primtalsfaktorisering av $(x+1)$.

Fallet $s = 0$ ger att $r = k$ och p^k delar $(x-1)$ eller equivalent att

$$x \equiv 1 \pmod{p^k} .$$

Fallet $r = 0$ ger att $s = k$ somliksom ovan medför att

$$x \equiv -1 \pmod{p^k} .$$

Om nu $s \neq 0$ och $r \neq 0$, så har vi att primtalet p delar både $(x-1)$ och $(x+1)$ och kommer då också att dela summan av $(x-1)$ och $(x+1)$ varför p^s måste dela talet 2. Orimligt om $p \geq 3$ (eller $p = 2$ och det minsta av talen s och r är större än 1), fallet $p = 2$ behandlas nedan).

Slutsatsen är att om $p \geq 3$ så har ekvationen $x^2 = 1$ bara två lösningar i ringen Z_{p^k}.

Nu till fallet $p = 2$. Vi har givetvis lösningarna $x = \pm 1$, men också möjligheten tilllösningar i fallet $s = 1$ och $r = k - 1$, resp $r = 1$ och

$s = k-1$. Vi undersöker nu dessa fall. Och jovisst, om 2^{k-1} delar $(x-1)$ och $0 \leq (x-1) \leq 2^k$ så har vi att $x = 2^k + 1$ är den enda möjligheten, och eftersom det då gäller att 2 delar $x+1$ har vi att

$$(x-1)(x+1) = C2^{k-1}2 = C2^k \ ,$$

för någon konstant C, dvs $x = 2^{k-1}+1$ är en lösning till $x^2 = 1$ i ringen Z_{2^k} för $k \geq 2$. Likaledes $x = 2^{k-1} - 1$ löser ekvationen $x^2 = 1$ i ringen Z_{2^k}.

Slutsatsen är att i alla ringar Z_{2^k}, där $k \geq 2$, har ekvationen $x^2 = 1$ precis fyra olika lösningar.

Nu tillslut betraktar vi ringen Z_n där $n = 2^{n_1}\Pi_{i=2}^t p_i^{n_i}$ och p_2, p_3, ..., p_t är olika primtal skilda från primtalet 2. Eftersom Z_{2^k} har bar en lösning till ekvationen $x^2 = 1$ i fallet $k = 1$, med hjälp av kinesiska restsatsen att

SVAR: Om $n = 2^{n_1}\Pi_{i=2}^t p_i^{n_i}$ så är antalet lösningar i ringen Z_n till ekvationen $x^2 = 1$ lika med 2^{t-1} om $n_1 \leq 1$ och lika med $4 \cdot 2^{t-1}$, dvs 2^{t+1} om $n_1 > 1$.

10. (5p) Låt $\bar{G}$ beteckna den komplementära grafen till grafen G, dvs G och $\bar{G}$ har samma nodmängd och det finns en kant mellan noderna v och u i $\bar{G}$ om och endast om det saknas en kant mellan v och u i G. Låt $\chi(G)$ och $\chi(\bar{G})$ beteckna kromatiska talen för graferna G respektive $\bar{G}$.

    Visa att om G har n noder så gäller att

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1 \ .$$

Lösning: Vi använder oss av ett induktionsbevis över antalet noder. Påståendet självklart sant när $n = 1$.

Betrakta en graf G med n noder och antag att påståendet är sant för alla grafer med färre än n noder. Låt vara v vara en av noderna i G och betrakta grafen G' som erhålles från G genom att noden v och alla kanter från v har eliminerats.

Vi kan nu antaga att noderna i grafen G' har färglagts med a olika färger och noderna i komplementet till denna graf, grafen $\overline{G'}$, med b färger, där

$$a + b \leq n \ .$$

Om vi nu har $n+1$ färger till förfogande kan vi nu ledigt färglägga noden med samma färg, en färg som ej använts vare sig i G' eller dess komplement $\overline{G'}$. Ingen granne till noden v, vare sig i G eller i $\overline{G}$ kommer att ha samma färg som noden v.