

Lösningar till tenta A i 5B1204 DISKRET MATEMATIK för D och 5B1203 DISKRET MATEMATIK för F3 och F1spec den 5 juni 2007.

1. (3p) Visa att två permutationer är konjugerade om och endast om de är av samma typ.

Lösning: Se lärobok.

2. (3p) Låt φ beteckna Eulers φ -funktion. Visa att om $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$ där talen p_1, p_2, \dots, p_k är olika primtal och e_1, e_2, \dots, e_k är positiva heltal så gäller att

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Lösning: Se lärobok.

3. (a) (1p) Beräkna $7!$.

Lösning: $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

- (b) (1p) Beräkna $S(5, 3)$.

Lösning: Använder att $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$ och får då

$$S(5, 3) = S(4, 2) + 3S(4, 3).$$

$$S(4, 3) = S(3, 2) + 3S(3, 3) = S(3, 2) + 3 \cdot 1.$$

$$S(4, 2) = S(3, 1) + 2S(3, 2) = 1 + 2S(3, 2).$$

$$S(3, 2) = S(2, 1) + 2S(2, 2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

Detta ger nu

$$S(4, 2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7.$$

$$S(4, 3) = 3 + 3 \cdot 1 = 6.$$

$$S(5, 3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25.$$

- (c) (1p) Beräkna $\binom{8}{2,3,3}$.

Lösning:

$$\binom{8}{2,3,3} = \frac{8!}{2!3!3!} = 560.$$

4. (a) (2p) Beräkna $1024^{4096} \pmod{51}$.

Lösning: Då $51 = 3 \cdot 17$ så

$$\varphi(51) = 51 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{17}\right) = 2 \cdot 16 = 32.$$

Då talet 51 inte delar talet 1024, och då $4096 = 2^{12} = 2^5 \cdot 2^7 = 32 \cdot 128$ så gäller enligt Eulers sats att

$$1024^{4096} \equiv_{51} (1024^{32})^{128} \equiv_{51} 1^{128} \equiv_{51} 1.$$

Svar: 1

(b) (2p) Bestäm 17^{-1} i ringen Z_{53} .

Lösning: Vi använder Euklides algoritm för att hitta en lösning till den diofantiska ekvationen $53x + 17y = 1$.

$$\begin{aligned} 53 &= 3 \cdot 17 + 2 \\ 17 &= 8 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Detta ger att $1 = 17 - 8 \cdot 2 = 17 - 8(53 - 3 \cdot 17) = 25 \cdot 17 - 8 \cdot 53$ och varur vi får

$$1 \equiv_{53} 25 \cdot 17$$

så vi får

Svar: $25 = 17^{-1}$ i ringen Z_{53} .

5. (3p) Grafen G har precis en cykel. Antalet noder i G är 384 och antalet kanter är 383. Hur många komponenter består G av.

Lösning: Tag bort en kant från cykeln. Då är varje komponent ett träd och det som återstår av grafen är 384 noder och 382 stycken kanter. Om antalet komponenter är k , komponenten T_i har v_i noder och $v_i - 1$ stycken kanter, $i = 1, 2, \dots, k$ så gäller

$$\begin{aligned} 384 &= \sum_{i=1}^k v_i \\ 382 &= \sum_{i=1}^k (v_i - 1) = \sum_{i=1}^k v_i - \sum_{i=1}^k 1 \end{aligned}$$

Detta ger att $\sum_{i=1}^k 1 = 384 - 382 = 2$, dvs $k = 2$

Svar: Antalet komponenter är 2.

6. (3p) På hur många sätt kan mängden $\{A, B, C, D, 1, 2, 3, \dots, 12\}$ delas in i tre oetiketterade delmängder så att A och B tillhör olika mängder och så att 1, 2 och 3 också tillhör olika delmängder.

Lösning: Först lägger vi ut elementen 1, 2 och 3 i varsina delmängder. Detta går på ett sätt bara eftersom delmängderna var oetiketterade. Men nu kan vi sätta ut etiketter, etiketten 1 på den delmängd som innehåller ettan etc.

När vi väljer varsina delmängder åt A och B blir antalet möjligheter $3 \cdot 2 = 6$.

Nu återstår de 10 elementen i mängden $\{C, D, 4, 5, 6, \dots, 12\}$ som vi kan lägga ut lite som det faller sig i de tre olika delmängderna, dvs på totalt 3^{10} olika sätt.

Multiplikationsprincipen ger nu oss

Svar: $6 \cdot 3^{10}$.

7. Betrakta grafen G med noder i de parvis disjunkta mängderna A_1 , A_2 och A_3 och en kant mellan noden $x \in A_i$ och noden $y \in A_j$ om och endast om $i \neq j$.

(a) (2p) Under vilka förutsättningar har grafen G en Eulerkrets?

Lösning: Låt v_i beteckna antalet noder i A_i . Valensen hos en nod i A_1 är då $v_2 + v_3$ och similt för noderna i A_2 och A_3 . En sammanhängande graf har en Eulerkrets precis då varje nod har en jämn valens. Således:

Fall 1. Om v_1 är ett jämnt tal så finns en Eulerkrets om v_2 och v_3 är jämna tal och bara då.

Fall 2. Om v_1 är ett udda tal så finns en Eulerkrets om v_2 och v_3 är udda tal och bara då.

- (b) (2p) Antag att grafen G saknar en Eulerkrets. Under vilka förutsättningar kan man då plocka bort kanter från grafen G så att en Eulerkrets finns i den graf som då återstår?

Lösning: Om grafen saknar en Eulerkrets kommer antingen precis en eller två av mängderna A_i , $i = 1, 2, 3$ att innehålla ett udda antal element.

Fall 1: Mängden A_3 innehåller ett udda antal element, medan A_2 och A_1 innehåller ett jämnt antal element var varav minst en av dessa mängder innehåller minst fyra element, låt oss säga mängden A_2 .

Börja med att ta bort alla kanter från A_3 till A_1 . Nu har alla noder utom de i A_2 en jämn valens. Nu delar vi in mängden A_2 i två delmängder B_2 och C_2 med vardera ett jämnt antal element, vilket är möjligt emedan A_2 har minst fyra element. Från noden b i A_1 tar vi bort kanterna till noderna i B_2 och från noden c i A_1 kanterna till noderna i C_2 . Nu har alla noder en jämn valens. Grafen är fortfarande sammanhängande eftersom varje nod i A_3 har en kant till varje nod i A_2 och varje nod i A_1 har minst en kant till någon nod i A_2 , så alla noder i A_1 kan förbindas med alla noder i A_3 .

Fall 1spec: Mängden A_3 innehåller ett udda antal element, medan A_2 och A_1 båda innehåller precis två element vardera, $A_1 = \{b_1, c_1\}$ och $A_2 = \{b_2, c_2\}$. Tag bort kanterna mellan b_1 och c_2 resp kanten mellan b_2 och c_1 . Alla noder har jämn valens och grafen är sammanhängande (rital!) och det finns en Eulerkrets.

Fall 2: Mängden A_3 innehåller ett jämnt antal element, medan A_2 och A_1 innehåller ett udda antal element var, behandlas analogt. Tag helt enkelt bort alla kanter mellan noderna i A_1 och A_2 . Nu har alla noder en jämn valens. Grafen är sammanhängande eftersom varje nod i A_i , för $i = 1, 2$, har en kant till varje nod i A_3 .

8. (3p) Låt φ och ψ beteckna nedanstående permutationer:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Undersök om det finns någon permutation x sådan att $x\varphi x^3 = \psi$.

Lösning: Vi skriver först permutationerna φ och ψ som produkter av disjunkta cykler:

$$\varphi = (1\ 4\ 5\ 3)(2\ 6) \quad \text{och} \quad \psi = (1)(2\ 4\ 5)(3\ 6)$$

och därefter som produkter av transpositioner, t ex:

$$\varphi = (1\ 3)(1\ 5)(1\ 4)(2\ 6) \quad \text{resp} \quad \psi = (1)(2\ 5)(2\ 4)(3\ 6).$$

Tydligt är φ en jämn permutation. Oavsett om x är udda eller jämn så kommer $x\varphi x^3$ att vara en jämn permutation, som ju aldrig kan vara lika med den udda permutationen ψ . Det finns ingen permutation x som löser ekvationen.