Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 15 mars 2010 kl 14.00-19.00.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen under vt08 adderas till skrivningspoängen.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Bestäm den största gemensamma delaren till de bägge talen 757 och 908.

2. (3p) Lös rekursionsekvationen

   $$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}\ , \qquad n = 2, 3, \dots\ ,$$

   med startvärdena $a_0 = 0$ och $a_1 = -3$.

3. (a) (1p) Ange det kromatiska talet för den komletta bipartita grafen $K_{452,341}$.

   (b) (2p) Rita en graf, utan multipla kanter och loopar, med 7 noder och vars kromatiska tal är 4.

4. (3p) Är nedanstående två summor, när de summeras ihop, lika eller olika:

   $$\sum_{k=0}^{120} 17^k \cdot 12^{120-k}\binom{120}{k}\ , \qquad \text{resp,} \qquad \sum_{k=0}^{120} 3^k \cdot 26^{120-k}\binom{120}{120-k}\ .$$

5. (3p) Bestäm antalet tal $1 \leq n \leq 700$ som inte delas av något av talen 2, 5 eller 7.

DEL II

6. (3p) Låt $\varphi(n)$ beteckna antalet hela tal $1 \leq m \leq n$ som är relativt prima med n. Definiera en funktion $\psi(n)$ genom

$$\psi(n) = \frac{\varphi(n^2)}{\varphi(n)} \ .$$

Härled ett explicit uttryck för $\psi(n)$.

7. (3p) Kan det finnas någon sammanhängande planär graf vars alla noder har en valens (grad) större än fyra och alla cykler i grafen har en längd minst lika med fyra.

8. Låt $\mathcal{S}_8$ beteckna mängden av permutationer på mängden $\{1, 2, \ldots, 8\}$, och låt ψ och φ beteckna permutationerna (cykelnotation)

$$\psi = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7) \ , \qquad \varphi = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) \ .$$

(a) (1p) Bestäm en permutation $\gamma \in \mathcal{S}_8$ sådan att

$$\gamma\psi = \varphi \ .$$

(b) (2p) Varför finns det ingen permutation $\gamma \in \mathcal{S}_8$ sådan att

$$\gamma\psi\gamma = \varphi\gamma^2 \ ?$$

(c) (2p) Finns det någon permutation $\gamma \neq (1)$ sådan att

$$\gamma\psi\gamma^{-1} = \psi \ ?$$

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. (a) (1p) Bestäm antalet ekvivalensrelationer på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ sådana att 1 inte är ekvivalent med 2.

(b) (4p) Bestäm antalet ekvivalensrelationer på mängden $\{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ sådana att 1 inte är ekvivalent med 2.

Svaren skall ges i formen av ett heltal, och lösningarna skall motiveras.

10. (a) (2p) Visa att om för de tre talen x, y och z gäller att

$$x^3 + y^3 = z^3 \ ,$$

så delar talet 7 minst ett av dessa tre tal.

(b) (3p) Bestäm, och ange på ett lämpligt sätt, samtliga heltalstripplar (x, y, z) sådana att talet 57 inte delar något av talen x, y eller z men ändå

$$x^3 + y^3 \equiv z^3 \pmod{57} \ .$$