Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 10 januari 2011 kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden, tel. 0730547891.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Vid denna tenta är det inte aktuellt med några bonuspoäng

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Bestäm hela tal n och m sådana att
$$314n + 2187m = 1 \ .$$

2. (3p) Lös rekursionsekvationen
$$a_n = -3a_{n-1} + 10a_{n-2} \ , \qquad a_0 = 5, \ a_1 = -4 \ .$$

3. (3p) Låt φ och ψ beteckna nedanstående två permutationer på mängden $\{1, 2, \ldots, 7\}$:
$$\varphi = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7) \ , \quad \psi = (1\ 3)(6\ 5\ 7)(4\ 2) \ .$$
Bestäm en permutation γ sådan att
$$\varphi^3\gamma = \psi^3 \ .$$

4. (3p) Beräkna
$$\binom{23}{20} + \binom{23}{21} + \binom{24}{22} \ .$$

5. (3p) Ge en förklaring till varför varje graf som har minst en kant men som saknar noder av valens ett måste ha minst en cykel.

DEL II

6. (3p) Visa att om en graf G med n noder har kromatiska talet $\chi(G) = n$ så måste antalet kanter i G vara minst lika med $n(n-1)/2$.

7. (4p) En klass bestående av 11 flickor och 13 pojkar skall ställa upp sig i fyra lika långa led. Hur många olika sådana leduppställningar kan man bilda om ett krav är att varje led skall innehålla minst en pojke och minst en flicka. (Obs: Leden är inte etiketterade, men varje led har en bestämd riktning, dvs någon står först resp sist.)

8. (4p) Bestäm antalet ekvivalensrelationer på mängden $\{1, 2, \ldots, 6\}$ som har egenskapen att elementen 1 och 2 hamnar i olika ekvivalensklasser.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. (a) (2p) Bestäm antalet lösningar till ekvationen $x^2 = 1$ i ringen Z_{1800}.

   (b) (3p) Låt n vara ett positivt heltal. Härled ett uttryck för antalet rötter till ekvationen $x^2 = 1$ i ringen Z_n.

10. (5p) Låt $\bar{G}$ beteckna den komplementära grafen till grafen G, dvs G och $\bar{G}$ har samma nodmängd och det finns en kant mellan noderna v och u i $\bar{G}$ om och endast om det saknas en kant mellan v och u i G. Låt $\chi(G)$ och $\chi(\bar{G})$ beteckna kromatiska talen för graferna G respektive $\bar{G}$.

    Visa att om G har n noder så gäller att

    $$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1 \ .$$