KTH Matematik,
Olle Stormark.

SF1626 Flervariabelanalys, 7.5 hp, för CELTE1 vt 2010.

Flervariabelanalysen är en rättfram generalisering av envariabelsmatematiken till *funktioner av flera variabler* − som till exempel $z = f(x, y)$. Detta innebär att vi ska förstå hur man deriverar och integrerar flervariabelsfunktioner, hur man bestämmer extremvärden, och så vidare.

Efter genomgången kurs SKALL studenten vara väl förtrogen med differential- och integralkalkyl för funktioner av flera variabler. Detta innebär att studenten SKALL KUNNA:

- förstå, tolka och använda ämnets grundbegrepp − gränsvärden för funktioner av flera variabler, kontinuitet, differentierbarhet, partiella derivator, funktionalmatriser och funktionaldeterminanter, gradienter, riktningsderivator, multipelintegraler och kurvintegraler;
- beräkna enklare gränsvärden för funktioner av flera variabler och avgöra huruvida sådana funktioner är kontinuerliga eller kanske till och med differentierbara;
- beräkna partiella derivator, använda den allmänna kedjeregeln, samt använda koordinattransformationer för att förenkla och därefter lösa vissa enklare partiella differentialekvationer;
- bestämma funktionalmatrisen till en given funktion, samt använda denna matris för linjär approximering och för att avgöra om funktionen ifråga är lokalt inverterbar;
- använda Taylors formel i flera variabler för att med en viss noggrannhet approximera en given funktion med hjälp av ett Taylorpolynom;
- använda gradienten för bestämning av riktningsderivator samt tangentplan till nivåytor;

- beräkna vissa multipelintegraler;
- använda multipelintegraler vid beräkningar av areor, volymer och massor;
- lösa max- och minproblem för flervariabelsfunktioner – med eller utan bivillkor;
- beräkna kurvintegraler och potentialfunktioner;
- använda Greens formel för att beräkna kurvintegraler runt *slutna* kurvor.

Studenten ska också ha tillägnat sig övergripande kompetenser och insikter såsom:

- vidareutvecklat sin förmåga att föra matematiska resonemang med implikationer och ekvivalenser och skriva matematisk text med variabler och parametrar, summa-, gränsvärdes-, derivata-, och integraltecken;
- ställa upp matematiska modeller för verkliga förlopp med hjälp av de grundläggande begreppen, tolka resultat och göra rimlighetsbedömningar;
- ha insikt om hur matematikens verktyg och tänkande kommmer till användning inom tillämpningar som ligger nära utbildningen.

Kurslitteraturen utgörs av PERSSON-BÖIERS: ANALYS I FLERA VARIABLER med tillhörande ÖVNINGAR I ANALYS I FLERA VARIABLER, utgivna av STUDENTLITTERATUR, samt BETA Mathematics Handbook (också STUDENTLITTERATUR), som är *tillåtet hjälpmedel vid KS:ar och tentor*. Dessa böcker kan köpas i Studentkårens bokhandel.

Undervisningen ges i form av 30 två-timmars lektioner. Huvudsyftet med undervisningen är att *avdramatisera matematiken*, så att åhörarna inser att den i grund och botten är tämligen *enkel*.

Som vanligt riktar sig undervisningen i första hand till de teknologer som inte klarar av att läsa in kursen på egen hand, och är betydligt mera informell än kursboken – med många figurer och handviftningsargument. Och framför allt ges möjlighet att *ställa frågor*.

Nytt för i år är att det ställs strängare krav på BEGREPPSFÖRSTÅELSE och LOGISK FÖRMÅGA än tidigare. Syftet med detta är att du ska få större möjligheter att se helheter och sammanhang i kursen, och inte minst att få kunskaper som varar länge och som kan tas fram vid lösning av besvärliga problem i tillämpade ämnen. Konkret innebär detta att det kommmer att förekomma TEORIUPPGIFTER på tentan. Se modelltentorna i slutet av denna promemoria! Dessa är alltså mera representativa än gamla extentor.

Tider och sal: Tisdag, onsdag, torsdag och fredag 10–12 i sal V22 i V-boden under period 3.

Tentamensskrivningen innehåller 10 uppgifter som kan ge 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 och 3 svarar mot kontrollskrivningarna 1 och 2, medan uppgift 2 svarar mot inlämningsuppgiften. Talen 7–10 på tentan är tänkta främst för dem som siktar på högre betyg; poängen på dessa uppgifter kallas fór VG-poäng nedan.

Betygsgränser (preliminära):

- För betyg A: 31 poäng, varav minst 11 VG-poäng.
- För betyg B: 26 poäng, varav minst 7 VG-poäng.
- För betyg C: 21 poäng, varav minst 3 VG-poäng.
- För betyg D: 18 poäng.
- För betyg E: 16 poäng.
- För betyg Fx: 14 poäng. Detta innebär att du har möjlighet att *komplettera till betyget E.* Kontakta kursledaren om du vill göra detta!

Bonuspoäng fås via de två kontrollskrivningarna och inlämningsuppgiften. Kontrollskrivning 1 svarar mot uppgift 1 på tentan, medan kontrollskrivning 2 svarar mot uppgift 3 på tentan. En godkänd lösning av inlämningsuppgiften ger automatiskt 4 poäng på den andra tentamensuppgiften.

Varje kontrollskrivning består av 3 uppgifter värda 3 poäng vardera, så att totala poängen maximalt är 9. Den som fått 5 eller 6 poäng på en kontrollskrivning får automatiskt 3 poäng på motsvarande tentamensuppgift. Den som fått minst 7 poäng på en kontrollskrivning får automatiskt 4 poäng på motsvarande tentamensuppgift, som därför inte skall lösas.

Den som löser någon av uppgifterna 1 och 3 på tentan trots att vederbörande redan har 3 poäng genom en godkänd kontrollskrivning kan erhålla 4 poäng på uppgiften endast om lösningen är fullständigt korrekt och väl motiverad.

Bonuspoängen gäller vid E:s ordinarie tenta i mars och omtenta i juniperioden − men inte vid några andra tentor!

Hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook.

Ordinarie tentamen ges fredagen den 19:e mars kl. 14.00 − 19.00.

OBS: Obligatorisk tentamensanmälan via Mina sidor under tidsperioden 1/2–28/2 kl. 24.00!!!

OBSERVERA att eventuella klagomål på rättningen skall framföras **skriftligt** på studentexpeditionens blanketter. Andra klagomål (muntliga, via e-mail etc.) beaktas icke.

Examinator: Anders Szepessy, som undervisar CINEK-programmmet. Titta gärna på hans hemsida för ytterligare information!

Kursansvarig: Olle Stormark, som har e-postadressen olles@math.ktk.se; den vanliga adressen är rum 3653 i Klocktornet, Lindstedtsvägen 25, KTH, och telefonnumret är 7907206.

Kurssekreterare: Claudette Tedfors, tedfors@kth.se, med telefonnumret 7907214. Claudette ansvarar för registrering och betygsrapportering. Var god observera att om det uppstår problem med kursregistrering och/eller tentamensanmälan så ska du vända dig till Claudette − och inte till Olle.

KURSPLANERING

Läsanvisningarna nedan refererar till de olika avsnitten i vår lärobok *Persson-Böiers: ANALYS I FLERA VARIABLER*. Övningstalen är hämtade från exempelsamlingen ÖVNINGAR I ANALYS I FLERA VARIABLER. De tal som inte hinns med i undervisningen lämnas till självstudier.

Observera för tydlighets skull att de avsnitt i boken som anges nedan SKALL KUNNAS!!!

Lektion 1 tis 19/1 Avsnitten **1.1–1.4**: $\mathbb{R}^n$, öppna, slutna och kompakta mängder, samt funktioner av flera variabler.

- Tal på tavlan: 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.11b, 1.13, 1.14, 1.23.
- Läxtal: 1.5, 1.11a,c, 1.12, 1.16ab, 1.18, 1.19.

Lektion 2 ons 20/1 Avsnitten **1.5, 1.6, 2.1:** Gränsvärden, kontinuitet och partiella derivator.

- Tal på tavlan: 1.24bcdg, 1.26, 1.29c, 2.1de, 2.2ab, 2.3.
- Läxtal: 1.24a, 1.27a, 1.29a, 2.1a,b, 2.5, 2.6a.

Lektion 3 tor 21/1 Avsnitten **2.2, 2.3:** Differentierbarhet och kedjeregeln.

- Tal på tavlan: 2.8c, 2.10, 2.11, 2.15b, 2.18, 2.21, 2.22.
- Läxtal: 2.8a,d, 2.9, 2.12, 2.13, 2.15a, 2.19, 2.20, 2.26.

Lektion 4 fre 22/1 Avsnitt **2.4:** Gradient och riktningsderivata.

- Tal på tavlan: 2.28, 2.29, 2.31, 2.34, 2.39, 2.46.
- Läxtal: 2.30, 2.32, 2.35, 2.38, 2.42ab, 2.44.

Lektion 5 tis 26/1 Fortsättning av **2.4:** Gradientens geometriska betydelse, samt början på **2.5:** Derivator av högre ordning.

- Tal på tavlan: 2.50, 2.52, 2.53.
- Läxtal: 2.51, 2.55.

Lektion 6 ons 27/1 Slutet av **2.5:** partiella differentialekvationer.

- Tal på tavlan: 2.54, 2.56, 2.58.
- Läxtal: 2.55.

Lektion 7 tor 28/1 Början på avsnitt **2.6:** Taylors formel.

- Tal på tavlan: 2.60b, 2.61b, 2.62, 2.64, 2.65.
- Läxtal: 2.60a, 2.61a, 2.63.

Lektion 8 fre 29/1 Fortsättning av **2.6:** Lokala extrempunkter.

- Tal på tavlan: 2.68, 2.69, 2.70.
- Läxtal: 2.66, 2.67.

Lektion 9 tis 2/2 Avsnitten **2.7, 3.1.1:** Differentialer och kurvor.

- Tal på tavlan: 2.71bd, 2.73, 2.74, 2.81, 3.1, 3.2bc, 3.3.
- Läxtal: 2.71ac, 2.72, 3.2a, 3.4.

Lektion 10 ons 3/2 Avsnitten **3.1.2, 3.2:** Ytor och funktionalmatriser.

- Tal på tavlan: 3.5, 3.8, 3.9bd, 3.10bd, 3.13, 3.14.
- Läxtal: 3.6, 3.7, 3.9a, 3.10a, 3.12.

Lektion 11 tor 4/2 Avsnitt **3.3:** Funktionaldeterminanter.

- Tal på tavlan: 3.15, 3.17, 3.21, 3.22.
- Läxtal: 3.16, 3.18, 3.20.

Lektion 12 fre 5/2 Avsnitt **3.4:** Implicita funktionssatsen.

- Tal på tavlan: 3.24, 3.27, 3.29. 3.31.
- Läxtal: 3.23, 3.26, 3.28, 3.30, 3.32.

Lektion 13 tis 9/2 Kontrollskrivning 1 på kapitlen 1–3.

Lektion 14 ons 10/2 Avsnitt **6.1:** Dubbelintegral över en rektangel.

- Tal på tavlan: 6.2, 6.4, 6.5, 6.6.
- Läxtal: 6.1, 6.3, 6.8.

Lektion 15 tor 11/2 Inlämningsuppgiften delas ut! Avsnitten **6.2**, **6.3:** Dubbelintegraler.

- Tal på tavlan: 6.11, 6.12, 6.15, 6.17.
- Läxtal: 6.9, 6.10, 6.13, 6.14, 6.16.

Lektion 16 fre 12/2 Avsnitt **6.4:** Variabelbyte.

- Tal på tavlan: 6.19, 6.22, 6.25, 6.27.
- Läxtal: 6.18, 6.20, 6.24, 6.26, 6.28.

Lektion 17 tis 16/2 Avsnitten **6.5, 6.6:** Integration med hjälp av nivåkurvor och generaliserade dubbelintegraler.

- Tal på tavlan: 6.31, 6.32, 6.34, 6.35, 6.39, 6.41, 6.43.
- Läxtal: 6.30, 6.33, 6.37, 6.40, 6.42.

Lektion 18 ons 17/2 Avsnitten **7.1, 7.2:** Trippelintegraler samt cylinder- och sfäriska koordinater.

- Tal på tavlan: 7.1, 7.3, 7.11, 7.13, 7.15.
- Läxtal: 7.2, 7.4, 7.6, 7.8, 7.14.

Lektion 19 tor 18/2 Avsnitt **8.1:** Volymberäkningar.

- Tal på tavlan: 8.2, 8.4, 8.9, 8.11.
- Läxtal: 8.1, 8.5, 8.10, 8.13.

Lektion 20 fre 19/2 Avsnitten **8.2, 8.3:** Areor av buktiga ytor och tröghetsmomemt.

- Tal på tavlan: 8.15, 8.16, 8.17, 8.23, 8.24.
- Läxtal: 8.14, 8.19, 8.22, 8.27.

Lektion 21 tis 23/2 Avsnitt **8.4:** Masscentrum, repetition.

- Tal på tavlan: 8.29, 8.31, 8.32, 8.42.
- Läxtal: 8.28, 8.30, 8.44.

Lektion 22 ons 24/2 Inlämningsuppgiften lämnas in! Avsnitt **4.1:** Optimering på kompakta mängder.

- Tal på tavlan: 4.3, 4.5, 4.6, 4.8, 4.11, 4.12, 4.15.
- Räkna själv: 4.1, 4.2, 4.7, 4.10, 4.14.

Lektion 23 tor 25/2 Avsnitt **4.2:** Optimering på icke-kompakta mängder.

- Tal på tavlan: 4.17, 4.19, 4.21, 4.22.
- Räkna själv: 4.16, 4.18, 4.20.

Lektion 24 fre 26/2 Avsnitt **4.3:** Optimering med bivillkor.

- Tal på tavlan: 4.25, 4.26, 4.30, 4.32, 4.36.
- Läxtal: 4.24, 4.28, 4.31, 4.33.

Lektion 25 tis 2/3 Avsnitt **9.1:** Kurvintegraler.

- Tal på tavlan: 9.2, 9.3, 9.4, 9.6.
- Läxtal: 9.1, 9.5.

Lektion 26 ons 3/3 Avsnitt **9.2:** Greens formel.

- Tal på tavlan: 9.8, 9.9, 9.12, 9.13, 9.17, 9.19.
- Läxtal: 9.7, 9.11, 9.15, 9.18, 9.21.

Lektion 27 tor 4/3 Avsnitten **9.3, 9.4:** Tillämpningar av Greens formel samt potentialfunktioner.

- Tal på tavlan: 9.24, 9.26, 9.30, 9.31, 9.35, 9.37.
- Räkna själv: 9.23, 9.25, 9.29, 9.32, 9.36, 9.38.

Lektion 28 fre 5/3 Slutet på **9.4** och repetition.

- Tal på tavlan: 9.39, 9.41, 9.42, 9.46, 9.50.
- Räkna sjäv: 9.44, 9.51.

Lektion 29 tis 9/3 Kontrollskrivning 2 på kapitlen 4 och 9.

Lektion 30 ons 10/3 Repetition.

Tentamen fre 19/3, kl. 14.00–19.00.

Modelltentamen 1

1. (a) Bestäm tangentplanet till ytan $z = x^4 - xy - 2y^2$ i punkten $(x, y) = (1, 2)$. (2p)
   (b) Ge ett exempel på vad tangentplan kan användas till. (2p)

2. Låt $f(x, y) = x^4 - xy + 2y^2$.
   (a) Bestäm Taylorpolynomet av andra ordningen till funktionen f i punkten $(x, y) = (0, 0)$. (2p)
   (b) Beskriv med hjälp av Taylorpolynomet kvalitativt funktionen f i en omgivning av origo. Har f ett extremvärde i origo? (2p)

3. Funktionen $f(x, y)$ är kontinuerligt deriverbar i $\mathbb{R}^2$ och löser differentialekvationen
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) - 3 \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0.$$
   Undersök om linjen $3x + y = 1$ är en nivåkurva till funktionen f. (4p)

4. Beskriv en metod att bestämma ett närmevärde till integralen
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx dy$$
   med hjälp av en summa, där $f(x, y) = e^{-x^4 y}$. Du får gärna ge beskrivningen i form av matlab eller pseudokod. (4p)

5. En partikel som påverkas av kraften $\boldsymbol{F}$ och rör sig längs kurvan γ uträttar arbetet $\int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$. Beräkna arbetet av kraften $(x, y, z + 1)$ längs kurvan $(x(t), y(t), z(t)) = (\sin t, \cos t, t)$, där $0 \le t \le 1$. (4p)

6. Antag att $f\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ är deriverbar och att $f(x) = 0$ då $x \in \partial([0, 1] \times [0, 1])$. Finns det en punkt $y \in (0, 1) \times (0, 1)$ så att $\nabla f(y) = 0$? Motivera!! (4p)

7. Bestäm den rektangel med störst area och axelparallella sidor som kan inskrivas i (dvs sågas ur) ellipsen
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$
   (4p)

8. En stege med längden 1 står vertikalt mot en vägg. Stegens nedersta del börjar glida med farten 1 horisontellt och dess övre del rör sig vertikalt tills hela stegen är horisontell. Därefter rör sig hela stegen horisontellt med farten 1. Vad är hastigheten för stegens mittpunkt när stegen rör sig? (4p)

9. Avgör om ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + 3y + xz = 0, \\ x + 3xy + z = 0, \end{cases}$$

definierar y och z som funktioner av x i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. (4p)

10. Härled uttrycket

$$\iint_A \sqrt{1 + (\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2}\, dxdy$$

för arean av en yta $\{(x, y, z)\colon (x, y) \in A,\ z = f(x, y)\}$ med hjälp av gränsvärden av små ytelement för ett givet område A och en given deriverbar funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ (t. ex. $A = [0, 1] \times [0, 1]$ och $f(x, y) = e^{x+y}$). (4p)

Modelltentamen 2

1. Bestäm alla tangentplan till ytan $3x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 + 2z^2 = 8$ som är parallella med yz-planet, det vill säga vinkelräta mot x-axeln. (4p)

2. Beräkna dubbelintegralen
$$\int_0^\pi \left(\int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\, dy \right) dx. \qquad (4p)$$

3. Ge ett exempel på en tillämpning av kurvintegralen. Skriv upp och beräkna kurvintegralen för ditt exempel. (4p)

4. Temperaturen i ett område beskrivs av funktionen $T(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + xz^2$ °C. En frusen fluga befinner sig i punkten $(1, 1, 1)$. Hur snabbt ökar temperaturen (uttryckt i grader per sekund) om flugan flyger med farten $1/2$ längdenhet per sekund i den riktning som ges av vektorn $(2, 1, 2)$? I vilken riktning skall den flyga för att bli så varm som möjligt? Ge ett bevis för detta och ange den maximala temperaturökningen. (4p)

5. Bestäm arean av den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ för vilken $z \geq 0$. (4p)

6. Bestäm alla stationära punkter till funktionen
$$f(x, y) = x^2 + y\, e^{x^2 - y}.$$
Bestäm även dessa punkters karaktär, d. v. s. lokalt maximum, lokalt minimum eller något annat. (4p)

7. (a) Låt funktionen $f(x, y)$ vara deriverbar i området $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Visa:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ i } D \Longrightarrow f \text{ är en funktion av } y \text{ enbart.} \qquad (2p)$$
   (b) Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ i } xy\text{-planet.} \qquad (2p)$$

8. Ge exempel på, eller förklara varför det inte finns, en reellvärd funktion av två variabler som
   (a) är kontinuerlig men ej partiellt deriverbar i origo, (1p)
   (b) är differentierbar men ej kontinuerlig i origo, (1p)
   (c) är partiellt deriverbar men ej kontinuerlig i origo, (1p)
   (d) är kontinuerlig men ej differentierbar i origo. (1p)
9. Vid tillverkningen av en rektangulär låda vill man minimera materialåtgången. Hjälp tillverkaren genom att bestämma minsta möjliga begränsningsarea hos ett rätblock med volymen 10 cm^3. (4p)
10. Den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

med lösningen $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kan beskriva koncentrationen av partiklar som rör sig med en given konstant hastighet $(1,2)$ och påverkas av en given källa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Visa att kurvor $(x(t), y(t))$ med riktningsderivatan $(x'(t), y'(t)) = (1,2)$ kan användas för att omformulera problemet som ett system av ordinära differentialekvationer

$$\frac{d}{dt}u(x(t),y(t)) = f(x(t),y(t)). \qquad (4p)$$