KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsföslag till KS 2B

i SF1626 Flervariabelanalys för CELTE1, vt 2010.

- Tillåtet hjälpmedel: BETA.
- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng; tillsammans kan man få 9 poäng.
- 5–6 poäng sammanlagt ger 3 poäng på tentamenstal 3, medan 7–9 poäng ger 4 poäng på detta tal.
- Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara införda symboler; formulera given information i början och låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening.

1. Bestäm de största och minsta värdena som funktionen

$$f(x,y) = x^2 - 2x - 2y$$

antar på den slutna enhetskvadraten $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

Lösning: *Inre stationära punkter:* $\partial f/\partial y = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ finns inga!

Randen består av 4 räta linjestycken, som får undersökas var för sig.

(1) $y = 0$ och $0 \le x \le 1 \Longrightarrow f = x^2 - 2x$; derivatan $2x - 2 = 0$ ger $x = 1$. Så vi får följande kandidater till största och minsta värden:

$$\begin{aligned} &f(0,0) = 0, \\ &f(1,0) = 1 - 2 = -1. \end{aligned}$$

(2) $x = 1$ och $0 \le y \le 1 \Longrightarrow f = -1 - 2y$, som är *avtagande*. Så största värdet är $f(1,0) = -1$, och det minsta är $f(1,1) = -3$.

(3): $y = 1$ och $0 \le x \le 1$, respektive (4): $x = 0$ och $0 \le y \le 1$, behandlas på samma sätt.

SVAR: Största värdet är 0 i $(0,0)$, minsta är -3 i $(1,1)$.

2. Vilken är den minimala summan av tre positiva tal med produkten lika med 8? Det vill säga: minimera $f(x, y, z) = x + y + z$ under villkoren $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ och $g(x, y, z) = xyz - 8 = 0$.

   Lösning: Lagrangesystemet blir

$$\begin{cases} 1 = \lambda \cdot yz & (1), \\ 1 = \lambda \cdot xz & (2), \\ 1 = \lambda \cdot xy & (3), \\ xyz = 8 & (4). \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Longrightarrow 1 = \frac{y}{x}, \text{ det vill säga } y = x;$$
$$\frac{(1)}{(3)} \Longrightarrow 1 = \frac{z}{x}, \text{ det vill säga } z = x;$$

   detta insatt i (4) ger $x^3 = 8 \iff x = 2$, så att $f_{\min} = 2 + 2 + 2 = 6$.

3. Beräkna

$$I = \oint_\gamma (e^x \cos x - y)\, dx + (2xy - \arctan(y^2))\, dy,$$

   där γ är den positivt orienterade randen till området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$.

   Lösning: $I = \oint_\gamma P\, dx + Q\, dy$, där

$$P = e^x \cos x - y \quad \text{och} \quad Q = 2xy - \arctan(y^2).$$

   Därmed blir $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 2y + 1$. Green säger då att

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (2y + 1)\, dxdy = \int_{x=-1}^{x=1} \left[y^2 + y\right]_{y=x^2}^{y=1} dx \\ &= \int_{-1}^{1} (2 - x^4 - x^2)\, dx = 2 \int_0^1 (2 - x^4 - x^2)\, dx \\ &= 2\left[2x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \cdots = \frac{44}{15}. \end{aligned}$$