KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 1B

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2010.

- Tillåtet hjälpmedel: BETA.
- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, så tillsammans kan man få 9 poäng.
- 5–6 poäng sammanlagt ger 3 poäng på tentamenstal 1, medan 7–9 poäng ger 4 poäng på detta tentatal.
- Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara införda symboler; formulera given information i början och låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening.

1. Funktionen
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$
är snäll och väluppfostrad då $(x,y) \neq (0,0)$ och är uppenbarligen lika med 0 längs koordinataxlarna (utanför origo). Blir $f(x,y)$ kontinuerlig i origo om man sätter $f(0,0) = 0$? FÖRKLARA!

   Lösning: Längs linjen $y = x$ är
$$f = f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2},$$
så gränsvärdet i origo längs denna linje är $= 1/2 \neq 0$, varför f INTE blir kontinuerlig i $(0,0)$.

2. Låt $z = x^2 y$, och sätt sedan $x = u^2 + v^2$, $y = \cos(uv)$, så att z blir en funktion av u och v. Beräkna $\partial z/\partial u$ som en funktion av u och v på två sätt: dels genom att först uttrycka z som en funktion av u, v och sedan derivera, och dels genom att använda kedjeregeln.

   Lösning: Insättning av u och v ger $z = x^2 y = (u^2+v^2)^2 \cdot \cos(uv) \Longrightarrow$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2(u^2+v^2)\cdot 2u \cdot \cos(uv) + (u^2+v^2)^2 \cdot (-\sin(uv))\cdot v.$$
Kedjeregeln säger att
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = 2xy\cdot 2u + x^2\cdot(-\sin(uv))\cdot v \\ &= 2(u^2+v^2)\cos(uv)\cdot 2u + (u^2+v^2)^2\cdot(-\sin(uv))\cdot v.\end{aligned}$$

3. Bestäm först alla stationära punkterna för

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2 + xy + y^2,$$

och avgör sedan dessas karaktär (lokalt minimum eller lokalt maximum eller sadelpunkt eller . . .).

Lösning: De stationära punkterna fås ur systemet

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 3x^2 + 4x + y, \\ 0 = f'_y = x + 2y. \end{cases}$$

Andra ekvationen visar att $x = -2y$; detta insatt i den första ger

$$12\,y^2 - 8y + y = 0 \iff 12y\,(y - 7/12) = 0 \iff$$
$$y = \begin{cases} 0 \\ 7/12 \end{cases} \implies x = \begin{cases} 0 \\ -7/6. \end{cases} .$$

Så de stationära punkterna är $(0,0)$ och $(-7/6, 7/12)$.

Ytterligare deriveringar ger

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 6x + 4, \\ f''_{xy} &= 1, \\ f''_{yy} &= 2, \\ f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 &= 12x + 7. \end{aligned}$$

I punkten $(0,0)$ är $f''_{xx} = 4 > 0$ och $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 7 > 0$, vilket visar att f har ett *lokalt minimum* i $(0,0)$. I $(-7/6, 7/12)$ är $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = -7 < 0$, så där har f en *sadelpunkt*.