KTH Matematik

Kontrollskrivning nr 2 i SF1626 för CDEPR & CMATD
måndagen den 17 maj 2010, kl 15.15-16.15

Version vänster.
BETA Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel vid tentamina och kontrollskrivningar.

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng
Kontrollskrivning 2 svarar mot uppgift 2 på tentamen. Den som får minst 5 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 3 poäng på tentamensuppgift 2 som då inte behöver lösas.
Den som får minst 7 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 4 poäng på tentamens uppgift 2 som då inte ska lösas..
För att undvika poängs avdrag så skall samtliga behandlade uppgifter förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

1. Bestäm det minsta värdet av $f(x,y) = x^2 + y^2$ då (x,y) ligger på ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$

2. Beräkna volymen av den kropp som har botten arean $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ och höjden $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Beräkna $\iiint_K z\,dxdydz$, då K är den del av enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, som ligger inom en kon med spets i origo. Konens halva toppvinkel $= \dfrac{\pi}{6}$ och den har den positiva $z-$axeln som axel.

KTH Matematik

Kontrollskrivning nr 2 i SF1626 för CDEPR & CMATD
måndagen den 17 maj 2010, kl 15.15-16.15

Version höger.
BETA Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel vid tentamina och kontrollskrivningar.

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng
Kontrollskrivning 2 svarar mot uppgift 2 på tentamen. Den som får minst 5 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 3 poäng på tentamensuppgift 2 som då inte behöver lösas.
Den som får minst 7 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 4 poäng på tentamens uppgift 2 som då inte ska lösas..
För att undvika poängs avdrag så skall samtliga behandlade uppgifter förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

1. Bestäm det största värdet av $f(x,y)=x^2+y^2$ då (x,y) ligger på ellipsen $x^2+4y^2=4$

2. Beräkna volymen av den kropp som har botten arean $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 2,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\}$ och höjden $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3. Beräkna $\iiint\limits_K z\,dxdydz$, då K är den del av enhetsklotet $x^2+y^2+z^2\le 1$, som ligger inom en kon med spets i origo. Konens halva toppvinkel $=\dfrac{\pi}{3}$ och den har den positiva $z-$axeln som axel.

Lösningsförslag

Vänster

1 . Vi söker (avståndet från origo till ellipsen)^2 . Ellipsen $4x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$ har halvaxlarna 1 och 2. Dvs minsta avståndet från origo till ellipsen=1

Svar $\min\limits_{4x^2+y^2=4} f(x,y = 1$

2. . Volymen av kroppen ges av

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\theta,\ dxdy = rdrd\theta \\ y = r\sin\theta \end{bmatrix} = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\int_{r=0}^{\sqrt{3}} r^2\,dr\right]d\theta = \frac{\pi}{2}\sqrt{3}\,.$$

3. $\iiint\limits_K z\,dxdydz =$

$$= \begin{bmatrix} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\ ,\Rightarrow dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \\ D \to \Omega = \{(r,\varphi,\theta): 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi/6, 0 \le \varphi \le 2\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^1 rr^2\,dr = 2\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/6}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 .= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$$

Höger

1 . Vi söker (avståndet från origo till ellipsen)^2 . Ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1$ har halvaxlarna 1 och 2. Dvs största avståndet från origo till ellipsen=2

Svar $\max\limits_{x^2+4y^2=4} f(x,y = 2^2 = 4$

2. Volymen av kroppen ges av

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\theta,\ dxdy = rdrd\theta \\ y = r\sin\theta \end{bmatrix} = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\int_{r=0}^{\sqrt{2}} r^2\,dr\right]d\theta = \frac{\pi}{3}\sqrt{2}\,.$$

3. $\iiint\limits_K z\,dxdydz =$

$$= \begin{bmatrix} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\ ,\Rightarrow dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \\ D \to \Omega = \{(r,\varphi,\theta): 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi/3, 0 \le \varphi \le 2\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^1 rr^2\,dr = 2\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/3}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 .= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\frac{\pi}{16}$$