KTH Matematik

Kontrollskrivning nr 1 i SF1626 för CDEPR & CMATD
torsdagen den 22 april 2010, kl 15.15-16.15

Version vänster.
BETA Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel vid tentamina och kontrollskrivningar.

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng
Kontrollskrivning 1 svarar mot uppgift 1 på tentamen. Den som får minst 5 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 3 poäng på tentamensuppgift 1 som då inte behöver lösas. Den som får minst 7 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 4 poäng på tentamens uppgift 1 som då inte ska lösas..
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

1. Undersök om det är sant att funktionen $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ i punkten $P=(2,-1)$ växer snabbare i $x-$riktning än i $y-$riktning?

2. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y) = y^3 + x^2 - 2x - 3y$.
Bestäm också punkternas karaktär (lokalt minimum eller lokalt maximum eller sadelpunkt eller…)

3. Funktionen $z(u,v)$ definieras genom $z(u,v) = f(x,y)$ där $x = u^2$ och $y = uv$. Undersök om
$$u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v} = 2x\frac{\partial f}{\partial x}$$
Vi förutsätter att f har kontinuerliga partiella derivator av första och andra ordningen.

Lycka till

KTH Matematik

Kontrollskrivning nr 1 i SF1626 för CDEPR & CMATD
torsdagen den 22 april 2010, kl 15.15-16.15

Version höger.
BETA Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel vid tentamina och kontrollskrivningar.

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng
Kontrollskrivning 1 svarar mot uppgift 1 på tentamen. Den som får minst 5 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 3 poäng på tentamensuppgift 1 som då inte behöver lösas. Den som får minst 7 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 4 poäng på tentamens uppgift 1 som då inte ska lösas..
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

1. Undersök om det är sant att funktionen $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ i punkten $P=(1,-2)$ växer snabbare i $y-$riktning än i $x-$riktning?

2. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y)=y^3-x^2+2x-3y$.
Bestäm också punkternas karaktär (lokalt minimum eller lokalt maximum eller sadelpunkt eller…)

3. Funktionen $z(u,v)$ definieras genom $z(u,v)=f(x,y)$ där $x=v^2$ och $y=uv$. Undersök om

$$v\frac{\partial z}{\partial v}-u\frac{\partial z}{\partial u}=2x\frac{\partial f}{\partial x}$$

Vi förutsätter att f har kontinuerliga partiella derivator av första och andra ordningen.

Lycka till

Lösningsförslag till KS1

Vänster

1. Hastigheter i $x-$riktning ges av $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=-\frac{2y}{(x-y)^2}$

Hastigheter i $y-$riktning ges av $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=\frac{2x}{(x-y)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)=\frac{2}{9}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)=\frac{4}{9}$

Tilväxthastighet till $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ i $P=(2,-1)$ i $y-$riktning är $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)=\frac{4}{9}$

Och . tilväxthastighet till $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ i $P=(2,-1)$ i $x-$riktning är $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)=\frac{2}{9}$

Svar : funktionen växer snabbare i $P=(2,-1)$ i $y-$riktning än i $x-$riktning.

2. Stationära punkter till $f(x,y)=y^3+x^2-2x-3y$ fås ur ekvationssystemet $\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases}$.

Vi får

$\begin{cases} 2x-2=0 \\ 3y^2-3=0 \end{cases}$ vilket ger $x=1$ och $y=\pm 1$, dvs två punkter (1,1) och (1,–1). Vi försöker bestämma punkternas karaktär med hjälp av andraderivatans test.

Vi har $A=f''_{xx}=2$, $B=f''_{xy}=0$, $C=f''_{yy}=6y$.

(a,b)	A	B	C	$AC-B^2$	
(1,1)	2	0	6	$12>0$ och $A>0$	$\Rightarrow$ (1,1) är en lokal minimipunkt.
(1,–1)	2	0	–6	$-12<0$	$\Rightarrow$ (1,–1) är en sadelpunkt

3. Vi har $z(u,v)=f(x,y)$, där $x=u^2$ och $y=uv$. Enligt kedjeregeln får man

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=2u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=u\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}=2x\frac{\partial f}{\partial x}$$

Höger.

1. Hastigheter i $x-$riktning ges av $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)=-\dfrac{2y}{(x-y)^2}$

Hastigheter i $y-$riktning ges av $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)=\dfrac{2x}{(x-y)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)=\dfrac{4}{9}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=\dfrac{2}{9}$

Tilväxthastighet till $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ i $P=(1,-2)$ i $y-$riktning är $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=\dfrac{2}{9}$

Och . tilväxthastighet till $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ i $P=(1,-2)$ i $x-$riktning är $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)=\dfrac{4}{9}$

Svar : funktionen växer snabbare i $P=(1,-2)$ i $x-$riktning än i $y-$riktning.

2. Stationära punkter till $f(x,y) = y^3 - x^2 + 2x - 3y$ fås ur ekvationssystemet $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$.

Vi får

$\begin{cases} -2x + 2 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$ vilket ger $x = 1$ och $y = \pm 1$, dvs två punkter (1,1) och (1,–1). Vi försöker bestämma punkternas karaktär med hjälp av andraderivatans test.

Vi har $A=f''_{xx} = -2$, $B=f''_{xy} = 0$, $C=f''_{yy} = 6y$.

(a,b)	A	B	C	$AC-B^2$
(1,1)	–2	0	6	$-12<0 \Rightarrow$ (1,1) är en sadelpunkt.
(1,–1)	–2	0	–6	$12>0$ och $A<0 \Rightarrow$ (1,–1) är en lokal maximipunkt

3. Vi har $z(u,v) = f(x,y)$, där $x = v^2$ och $y = uv$. Enligt kedjeregeln får man

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}=v\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}=2v\dfrac{\partial f}{\partial x}+u\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow v\dfrac{\partial z}{\partial v}-u\dfrac{\partial z}{\partial u}=2x\dfrac{\partial f}{\partial x}$$