KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 2A

i SF1626 Flervariabelanalys för CELTE1, vt 2010.

- Tillåtet hjälpmedel: BETA.
- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng; tillsammans kan man få 9 poäng.
- 5–6 poäng sammanlagt ger 3 poäng på tentamenstal 3, medan 7–9 poäng ger 4 poäng på detta tentatal.
- Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara införda symboler; formulera given information i början och låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening.

1. Bestäm de största och minsta värdena av funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

på den slutna enhetsskivan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning: *Inre stationära punkter:*

$$\begin{cases} 0 = \partial f/\partial x = 2x - 1 \iff x = 1/2, \\ 0 = \partial f/\partial y = 4y \iff y = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ punkten $(1/2,\, 0)$, där $f = 1/4 - 1/2 = -1/4$.

Randen: Där är $y^2 = 1-x^2$, så $f = x^2+2-2x^2-x = -x^2-x+2 = g(x)$, säg, med $-1 \leq x \leq 1$. $0 = g'(x) = -2x - 1 \Longrightarrow x = -1/2$. Så vi får följande kandidater till största och minsta värde på randen:

$$\begin{aligned} g(-1) &= -1 + 1 + 2 = 2, \\ g(-1/2) &= -1/4 + 1/2 + 2 = 2 + 1/4, \\ g(1) &= -1 - 1 + 2 = 0. \end{aligned}$$

SVAR: Största värdet $= 2 + 1/4$, minsta $= -1/4$.

2. Vilken är den maximala produkten av tre positiva tal med summan lika med 6? Det vill säga: maximera $f(x, y, z) = xyz$ under villkoren $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ och $g(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$.

   Lösning: Lagrangesystemet $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$, $g = 0$ blir

$$\begin{cases} yz = \lambda, \\ xz = \lambda, \\ xy = \lambda, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

   Första ekvationen säger att $\lambda = yz$; detta insatt i den andra ger $xz = yz \iff (x - y)z = 0 \iff y = x$, eftersom $z > 0$. $y = x$ och $\lambda = xz$ insatta i den tredje ekvationen ger $x^2 = xz \iff x(x - z) = 0 \iff z = x$. Med $y = z = x$ övergår den fjärde ekvationen i $3x = 6 \iff x = 2$. Så vi får punkten $(2, 2, 2)$, där $f = f_{\max} = 8$.

3. Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_\gamma -xy^3\,dx + 2x^2y\,dy$$

   där γ går från $(1, 1)$ till $(1/3, 3)$ längs kurvan $xy = 1$.

   Lösning: Vi parametriserar kurvan med y: $x = 1/y$ och $dx = -dy/y^2$, och får

$$I = \int_{y=1}^{3} \left(-\frac{1}{y} \cdot y^3 \cdot \frac{-1}{y^2} + 2\left(\frac{1}{y}\right)^2 \cdot y \right) dy = \int_{y=1}^{3} \left(1 + \frac{2}{y}\right) dy$$
$$= 2 + 2\ln 3.$$