KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 1A

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2010.

- Tillåtet hjälpmedel: BETA.
- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, så tillsammans kan man få 9 poäng.
- 5–6 poäng sammanlagt ger 3 poäng på tentamenstal 1, medan 7–9 poäng ger 4 poäng på detta tentatal.
- Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara införda symboler; formulera given information i början och låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening.

1. Funktionen
$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$
är snäll och väluppfostrad då $(x, y) \neq (0, 0)$. Kan man definiera $f(x, y)$ i punkten $(0, 0)$ så att $f(x, y)$ blir kontinuerlig där? I så fall, förklara HUR!

   Lösning: $(x, y) \to (0, 0) \iff t = x^2 + y^2 \to 0 \implies$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$
Så $f(x, y) \to 1$ då $(x, y) \to (0, 0)$ oavsett längs vilken väg detta sker. Detta betyder att $f(x, y)$ blir kontinuerlig i $(0, 0)$ om man sätter $f(0, 0) = 1$.

2. Låt $w = f(x, y, z) = xy^2z^3$, och sätt sedan $x = \cos t$, $y = e^t$ och $z = \ln(t + 2)$ så att w blir en funktion av t. Beräkna
$$\frac{dw}{dt}(0).$$

   Lösning: Kedjeregeln ger att
$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \\ &= y^2z^3 \cdot (-\sin t) + 2xyz^3 \cdot e^t + 3xy^2z^2 \cdot \frac{1}{t+2}.\end{aligned}$$

Då $t=0$ är $x=1$, $y=1$ och $z=\ln 2$, varför

$$\frac{dw}{dt}(0) = 0 + 2\cdot(\ln 2)^3 + \frac{3}{2}\cdot(\ln 2)^2.$$

3. Bestäm först alla stationära punkterna för

$$f(x,y) = 2x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2,$$

och avgör sedan dessas karaktär (lokalt minimum eller lokalt maximum eller sadelpunkt eller ...).

Lösning: De stationära punkterna fås ur systemet

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 6x^2 - 8x + 2y, \\ 0 = f'_y = 2x - 2y. \end{cases}$$

Andra ekvationen visar att $y = x$; detta insatt i den första ger

$$6x^2 - 8x + 2x = 0 \iff 6x(x-1) = 0 \iff x = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \implies y = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Så de stationära punkterna är $(0,0)$ och $(1,1)$.

Ytterligare deriveringar ger

$$\begin{aligned} &f''_{xx} = 12x - 8, \\ &f''_{xy} = 2, \\ &f''_{yy} = -2, \\ &f''_{xx}\cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = -24x + 12. \end{aligned}$$

I punkten $(0,0)$ är $f''_{xx} = -8 < 0$ och $f''_{xx}\cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 12 > 0$, vilket visar att f har ett *lokalt maximum* i $(0,0)$. I $(1,1)$ är $f''_{xx}\cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = -12 < 0$, så där har f en *sadelpunkt*.