KTH -matematik

Problem i matematik
CDEPR & CDMAT
Flervariabelanalys

Problem inför KS 2.

1. Låt $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 3z^2 + 1$ och $G(x,y,z) = x^3 + y^3 - 4z^2 + 2$. Visa att i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ definieras genom ekvationerna

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

x och z som entydiga deriverbara funktioner av y. Bestäm ekvationen för tangenten i $(1,1,1)$ till skärningskurvan mellan $F(x,y,z) = 0$ och $G(x,y,z) = 0$.

2. Bestäm de stationära punkterna till funktionen $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$ samt avgör deras karaktär.

3. Ange största och minsta värde till funktionen $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ på triangeln med hörn i $(0,0)$, $(0,6)$ och $(6,0)$.

4. Bestäm största och minsta värde (om de existerar) till funktionen $f(x,y,z) = xy + z^2$ i området $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$.

5. Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x,y,z) = 2xy - z^2$ på mängden som ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

6. Vilken punkt på skärningskurvan mellan hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ och planet $x + y + 2z = 0$ ligger högst ovanför xy-planet?

7. Visa genom att lösa ett lämpligt extremvärdesproblem, att om z, y, z är vinklar i en triangel så gäller

$$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

8. Sök de punkter på skärningskurvan mellan $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$ och $x + y + z = 2$ som ligger närmast, resp. längst bort från origo.

9. Betäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2xy$ och avgör deras typ.

Svar

1. Tangentens ekvation är $(x, y, z) = (1, 1, 1,) + t(-1, 1, 0)$.

2. Lokalt max i $(1, 0)$ och lokalt min i $(-1, 0)$.

3. Största värde är 4 vilket inträffar i $(2, 1)$ och minsta värde 64 i $(4, 2)$.

4. Största värde $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ och minsta värde $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}, 0) = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$

5. Funktionens största värde är $-1/3$ som antages i punkterna $\pm(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$ och minsta värde -1 som antages i punkterna $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$.

6. Punkten $(-1, -1, 1)$.

8. Punkten $(2 + 2\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}$ ligger längst bort och $(2 - 2\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$ ligger närmast.

Lösningsförslag

Lösning till problem 1. Vi konstaterar att $F, G \in C^1$, $(x,y,z) = (1,1,1)$ uppfyller systemet $F = 0$, $G = 0$. Vidare är funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(F,g)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} 2x & -6z \\ 3x^2 & -8z \end{vmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Enligt implicita funktionssatsen kan vi "lösa ut" $x(y)$ och $z(y)$ ur ekvationssystemet. Detta innebär att skärningskurvan mellan ytorna $F = 0$ och $G = 0$ kan parametriseras med parametern y i omgivning av punkten $(1,1,1)$. Vi kan skriva skärningskurvan som $\mathbf{r}(y) = (x(y), y, z(y))$. Dess tangentvektor i punkten $(1,1,1)$ har riktningsvektor $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(1) = (x'(1), 1, z'(1))$. Implicit derivering av systemet med avseende på y ger

$$\begin{aligned} 2xx' + 2y - 6zz' &= 0 \\ 3x^2x' + 3y^2 - 8zz' &= 0 \end{aligned}$$

och insättning av $y = 1$ (vilket ger $x = 1$ och $z = 1$) ger

$$\begin{aligned} 2x'(1) + 2 - 6z'(1) &= 0 \\ 3x'(1) + 3 - 8z'(1) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x'(1) &= -1 \\ z'(1) &= 0. \end{aligned}$$

Detta ger tangentens ekvation $(x,y,z) = (1,1,1) + t(-1,1,0)$.

Alternativ: Vi kan även bestämma en tangentriktning med hjälp av $\nabla F(1,1,1) = (2,2,-6)$ och $\nabla G(1,1,1) = (3,3,-8)$. Tangenten till skärningskurvan måste vara vinkelrät mot båda ytornas normaler i punkten $(1,1,1)$ och är därför parallell med

$$\nabla F(1,1,1) \times \nabla G(1,1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & -8 \end{vmatrix} = (2,-2,0)$$

Lösning till problem 2. De kritiska punkterna fås ur ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f_x = 3 - 3x^2 - 3y^2 &= 0 \\ f_y = -6xy &= 0 \end{aligned}$$

Den adra ekvationen ger oss fallen:
Fall 1: $x = 0$ vilket ger att $y = \pm 1$.
Fall 2: $y = 0$ vilket ger att $x = \pm 1$.
Det finns således 4 kritiska punkter: $(0,1)$, $(0,-1)$ och $(1,0)$, $(.1,0)$.

För att avgöra karaktären av dessa punkter beräknar vi andra derivatorna:

$$f_{xx} = -6x, \quad f_{xy} = -6y, \quad f_{yy} = -6x$$

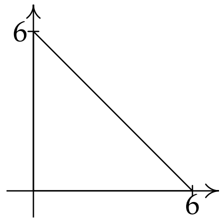
Detta ger de kvadratiska formerna:

punkt	kvadratisk form	typ
$(0,1)$	$Q = -12hk$	indefinit
$(0,-1)$	$Q = 12hk$	indefinit
$(1,0)$	$Q = -6h^2 + 6k^2$	negativt definit
$(-1,0)$	$Q = 6h^2 + 6k^2$	positivt definit

varav följer att $(0,1)$ och $(0,-1)$ är sadelpunkter, $(1,0)$ en lokal maximipunkt och $(-1,0)$ en lokal minimipunkt.

Lösning till problem 3. Området är slutet och begränsat, funktionen kontinuerlig, vilket innebär att den antar ett största resp. ett minsta värden i området.

Kritiska punkter fås ur



$$\begin{cases} f_x = 2xy(4-x-y) - x^2y & = & 0 \\ t_y = x^2(4-x-y) - x^2y & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy(8-3x-2y) & = & 0 \\ x^2(4-x-2y) & = & 0 \end{cases}$$

Fall 1: $x = 0$ ger punkt på randen.
Fall 2: $4 - x - 2y = 0 \Rightarrow x = 4 - 2y$ insatt i den första ekvationen ger

$$(4-2y)y(4y-4) = 0 \Rightarrow y = 0,\ y = 1,\ y = 2 \quad \text{med motsvarande} \quad x = 4,\ x = 2,\ x = 0.$$

Punkterna $(4,0)$ och $(0,2)$ ligger på randen. Enda kritiska punkt i det inre är $(2,1)$ med $f(2,1) = 4$.
Inga singulära punkter finns. På randen har vi $f(0,y) = 0$ och $f(x,0) = 0$. Slutligen på linjen $x + y = 6$ studerar vi

$$g(x) = f(x, 6-x) = x^2(6-x)(4-x-(6-x)) = 2x^2(x-6) \quad \text{för} \quad 0 \leq x \leq 6.$$

Här blir $g(0) = 0$, $g(6) = 0$. Vidare är

$$g'(x) = 2(3x^2 + 12x) = 6x(x-4).$$

Enda nollställe i det inre av intervallet är $x = 4$ vilket ger $g(4) = f(4,2) = -64$. Vi kan nu se att det största värdet är $f(2,1) = 4$ och det minsta $f(4,2) = -64$.

Lösning till problem 4. Området $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$ är slutet och begränsat (en ellipsoid) och f är kontinuerlig. Det finns således ett största värde och ett minsta värde till f i området. Kritiska punkter i det inre fås ur

$$\nabla f(x,y,z) = (y, x, 2z) = (0,0,0) \Rightarrow x = y = z = 0 \quad \text{med } f(0,0,0) = 0.$$

För att undersöka randen har vi $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ som bivillkor. Eventuella extremvärden på randen inträffar då

$$\begin{pmatrix} \nabla f \\ \nabla g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 2z \\ 2x & 4y & 6z \end{pmatrix} \quad \text{har rang} \leq 1.$$

Detta ger oss två ekvationer (två determinanter som måste vara $= 0$)

$$\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 4y^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2y^2$$

$$\begin{vmatrix} x & 2z \\ 4y & 6z \end{vmatrix} = 2z \begin{vmatrix} x & 1 \\ 4y & 3 \end{vmatrix} = 2z(3x - 4y) = 0$$

Fall 1: $z = 0$ och $x^2 = 2y^2$ insatt i bivillkoret ger $4y^2 = 1$ varav följer att $y = \pm\frac{1}{2}$ och $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4 fall) de möjliga värdena för f är $\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
Fall 2: $y = 2x/3$ tillsammans med ekvationen $x^2 = 2y^2$ ger $x = y = 0$ och bivillkoret ger då $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ och motsvarande värden fpr f är $\frac{1}{3}$. Detta ger att största värdet är $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ och det minsta värdet är $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$.

Lösning till problem 5. Bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $h(x,y,z) = 0$ betyder en cirkel i rummet (skärningen mellan planet $h = 0$ och sfären $g = 1$). Detta är en sluten begränsad mängd och f är kontinuerlig, vilket medför att det finns största och minsta värde till f på kurvan. Rangvillkoret för extrempunkter säger att

$$\begin{pmatrix} \nabla f \\ \nabla g \\ \nabla h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x & -2z \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{har rang} \leq 2. \text{ Detta ger efter kolumnoperationer}$$

$$4\begin{vmatrix} 2y & x-y & -y-z \\ y & y-x & z-x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} x-y & -y-z \\ y-x & z-x \end{vmatrix} = 4(x-y)\begin{vmatrix} 1 & -y-z \\ -1 & z-x \end{vmatrix}$$
$$= -4(x-y)(x+y) = 0$$

Fall 1: $x = y$ ger insatt i bivillkoren

$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 &= 1 \\ 2x + z &= 0 \end{cases} \Rightarrow 6x^2 = 1$$

Detta ger lösningarna $(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}})$ med $f = -\frac{1}{3}$.
Fall 2: $x = -y$ ger insatt i bivillkoren

$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 &= 1 \\ z &= 0 \end{cases}$$

vilket ger punkterna $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ med $f = -1$. Största värdet är således $-1/3$ och minsta värdet -1.

Lösning till problem 6. Vi sätter $f(x,y,z) = z$ och $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ och $h(x,y,z) = x + y + 2z$. Problemet är då att hitta största värdet till f under bivillkoren $g = 0$ och $h = 0$. Definitionsmängden är den kurva där planet $h = 0$ skär hyperboloiden $g = 0$. Detta är en sluten och begränsad mängd och f är kontinuerlig. Om vi använder metoden med rang av en matris så blir villkoret för extremvärde att

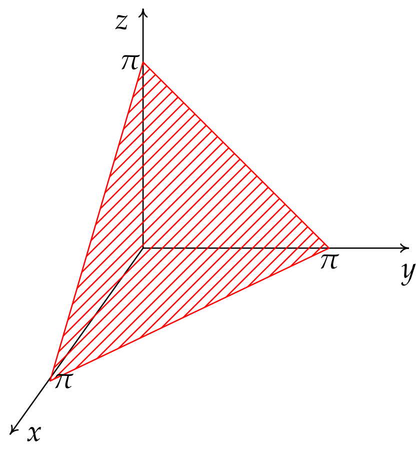
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & -2z \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(x-y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Insättning av detta i bivillkoren ger

$$\begin{cases} 2x^2 - z^2 &= 1 \\ 2x + 2x &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 &= 1 \\ z &= -x \\ x &= y \end{cases} \quad \text{samt}$$

med lösningarna $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ och $(-1, -1, 1)$. Vi ser att det största värdet ges av $f(-1, -1, 1) = 1$.

Lösning till problem 7. Om x, y, z är vinklar i en triangel så måste de ligga i intervallet $0 \leq x, y, z \leq \pi$ och uppfylla bivillkoret $g(x, y, z) = x + y + z = \pi$.



Definitionsmängden är en sluten begränsad mängd och funktionen $f(x, y, z) = \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \sin\frac{z}{2}$ är kontinuerlig i mängden. f antar således ett största värde i mängden. För att förenkla våra räkningar studerar vi funktionen $\ln f(z, y, z) = \ln \sin\frac{x}{2} + \ln \sin\frac{y}{2} + \ln \sin\frac{z}{2}$. Denna antar sitt största värde samtidigt som f (eftersom ln-funktionen är växande).

Nu ger rangvillkoret

$$\begin{pmatrix} \nabla \ln f \\ \nabla g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\cot(x/2)}{2} & -\frac{\cot(y/2)}{2} & -\frac{\cot(z/2)}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

har rang ≤ 1. Detta ger ekvationerna $\cot(x/2) = \cot(y/2) = \cot(z/2)$ eller (ekvivalent)

$$\tan(x/2) = \tan(y/2) = \tan(z/2).$$

Enda lösning i det aktuella intervallet för vinklarna är att $x = y = z$ och bivillkoret ger då att $x = y = z = \pi/3$ (dvs triangeln är liksidig). Motsvarande värde för f blir $1/8$.

Lösning till problem 8. Avståndet från origo ges av funktionen $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ och vi kan lika gärna studera $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (som har största resp. minsta samtidigt som $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Vårt problem är då att finna största/minsta värde av $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ under bivillkoren $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$ och $h(x, y, z) = x + y + z = 2$. Bivillkoren betyder geometriskt skärningen mellan sfären $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ och planet $x + y + z = 2$ vilket ger en sluten begränsad punktmängd. På grund av bivillkoret $g = 0$ kan vi också ersätta f med funktionen $f(x, y, z) = 4x$. Vi får nu villkoret

$$\begin{pmatrix} \nabla f \\ \nabla g \\ \nabla h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2x-4 & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{har rang} \leq 2 \text{ vilket ger.}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2x-4 & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8(y - z) = 0 \Rightarrow y = z.$$

Detta ger insatt i bivillkoren

$$\begin{cases} x^2 + 2z^2 - 4x &= 0 \\ x + 2z &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + 2z^2 &= 4 \\ x - 2 &= -2z \end{cases} \Rightarrow 6z^2 = 4$$

med lösningar $z = \pm\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y = \pm\frac{2}{\sqrt{6}}$ och $x = 2 \mp \frac{4}{\sqrt{6}}$.

Lösning till problem 9. Vi skriver funktionen på formen $f(x,y) = x^2y^2 - (x-y)^2$. Stationära punkter fås ur

$$f_x = 2xy^2 - 2(x-y) = 0$$
$$f_y = 2x^2y + 2(x-y) = 0$$

Addition av ekvationerna ger $2x^2y + 2xy^2 = 0 \Rightarrow 2xy(x+y) = 0$.
Fall 1: $x = 0$ medför att även $y = 0$ (från den första ekvationen).
Fall 2: $y = 0$ medför att även $x = 0$ (från den första ekvationen).
Fall 3: $x + y = 0$ ger insatt i den första ekvationen

$$2x \cdot x^2 - 2(2x) = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 2) = 0.$$

Roten $x = 0$ har vi redan hittat. Men $x = \pm\sqrt{2}$ är möjliga och ger motsvarande $y = -x = \mp\sqrt{2}$.

För att avgöra karaktären beräknar vi andraderivatorna

$$f_{xx} = 2y^2 - 2, \quad f_{xy} = 4xy + 2, \quad f_{yy} = 2x^2 - 2$$

Detta ger i punkterna $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ och $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ den kvadratiska formen

$$Q = 2h^2 + 2 \cdot (-6)hk + 2k^2 = 2(h^2 - 6hk + k^2) = 2((h-3k)^2 - 8k^2$$

vilket är en indefinit form. Punkterna är således sadelpunkter. I origo blir den kvadratiska formen

$$Q = -2h^2 + 4hk - 2k^2 = -2(h-k)^2.$$

Detta är en negativt semidefinit form. Vi kan således inte ge karaktären av denna punkt med hjälp av den kvadratiska formen. Men vi kan ändå se att det är en sadelpunkt ty $f(x,0) = -x^2 < 0$ men $f(x,x) = x^4 > 0$ dvs f antar både positiva och negativa värden i en omgivning av origo.

KTH Matematik

Problem i matematik
CDEPR & CDMAT
Flervariabelanalys

Problem om integraler inför KS2.

1. Beräkna integralerna

(a) $\iint_D (|x| + |y|)\, dxdy$ där $D = \{(x, y) \colon |x| + |y| \le 1\}$.

(b) $\iint_D \dfrac{x}{1+y}\, dxdy$ om $D = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

2. Beräkna $\iint_D \dfrac{2xy}{1 + x^2 + 2y^2}\, dxdy$ där D är det område i planet som definieras genom $\{(x, y) \colon x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + 2y^2 \le 1\}$.

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_\Omega \dfrac{dxdy}{(x+y)^3}$ där Ω är triangeln med hörn i punkterna $(0, 1)$, $(1, 2)$ och $(2, 1)$.

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_T \sqrt{y - x}\, dxdy$$

där T är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$.

5. Bestäm volymen av den kropp som mängden $\{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 \le z^2\}$ utskär ur enhetssfären.

6. Beräkna volymen av det område i $z \ge 0$ som begränsas av ytorna $z^2 = x^2 + y^2$ och $z = 2 - x^2 - y^2$. Ange även koordinaterna för tyngdpunkten till detta område.

7. Beräkna den itererade integralen $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_x^{\sqrt{\pi}} \frac{x}{y} \cdot \sin y^2\, dy \right) dx$.

8. Beräkna $\int_C (x^3 - x^2 y)\, dx + xy^2\, dy$ tagen ett varv i positiv led då C är cirkeln $x^2 + y^2 = 4$.

9. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C (3x^2 y - 3y)\, dx + (x^3 + e^{y^2})\, dy,$$

där C består av enhetscirkeln från $(-1, 0)$ till $(0, 1)$ i negativ led, följt av en rät linje från $(0, 1)$ till $(2, 0)$.

10. Beräkna $\int_C y dx - x dy$ då C är den båge på cirkeln $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ som går moturs från $(0, 1)$ till $(1, 0)$.

11. Beräkna integralen

$$\int_\gamma (2x + e^y)\, dx + (xe^y - y^2)\, dy$$

där γ är kurvan $y = x^2$ från $(0, 0)$ till $(1, 1)$.

Svar

1. (a) $4/3$, (b) $1/4$.

2. $\frac{1}{4}\big(1 - \ln 2\big)$.

3. Dubbelintegralens värde är $1/9$.

4. $4/15$.

5. $\frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

6. volym $\frac{5\pi}{6}$, tyngdpunkt $(0, 0, 11/10)$.

7. $\frac{1}{2}$.

8. 8π.

9. Kurvintegralens värde är $-3(1 + \pi/4)$.

10. $2 - \frac{\pi}{2}$.

11. $e + 2/3$.

Lösningsförslag

Lösning till problem 1. a) Symmetri gör att vi kan beräkna integralen över området i positiva kvadranten $D_1 = \{(x,y)\colon x \geq 0,\, y \geq 0,\, x+y \leq 1\}$ och multiplicera med 4. Detta ger

$$\begin{aligned} 4\iint_{D_1} (x+y)\}\, dxdy &= 4\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)\, dy = 4\int_0^1 \Big[xy + \frac{y^2}{2}\Big]_0^{1-x} dx \\ &= 2\int_0^{1-x} \big(2x(1-x) + (1-x)^2\big)\, dx = 2\int_0^1 (1-x^2)\, dx \\ &= 2\Big[x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

b) Itererad integration ger

$$\iint_D \frac{x}{1+y}\, dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{1+y}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-y^2}{1+y}\, dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)\, dy = \frac{1}{4}.$$

Lösning till problem 2. Vi gör först en skaländring för att få ellipskurvan till en cirkelbåge. $x = u$, $y = v/\sqrt{2}$. Det givna området blir $D' = \{(u,v)\colon u,v \geq 0,\, u^2+v^2 \leq 1\}$ i u,v-systemet. Vidare blir $dxdy = dudv/\sqrt{2}$ och den transformerade integralen är

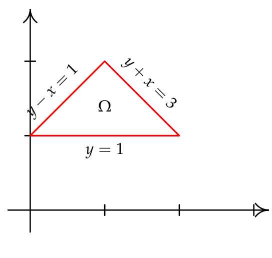
$$\iint_{D'} \frac{uv}{1+u^2+v^2}\, dudv.$$

Vi byter nu till polära koordinater, vilket ger $D'' = \{r,\theta)\colon 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ och integralen

$$\begin{aligned} \iint_{D''} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{1+r^2}\, rdrd\theta &= \int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2}\, dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= \int_0^1 \Big(r - \frac{r}{1+r^2}\Big)\, dr \Big[\frac{\sin^2\theta}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\Big[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}(1-\ln 2). \end{aligned}$$

Lösning till problem 3. Vi kan göra en itererad integration. Detta ger oss

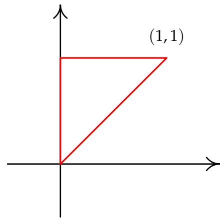
$$\begin{aligned} \iint_\Omega \frac{dxdy}{(x+y)^3} &= \int_1^2 dy \int_{y-1}^{3-y} \frac{dx}{(x+y)^3} \\ &= \int_1^2 \Big[\frac{-1}{2(x+y)^2}\Big]_{y-1}^{3-y} = \frac{1}{2}\int_1^2 \Big(\frac{1}{(2y-1)^2} - \frac{1}{9}\Big)\, dy \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{-1}{2(2y-1)} - \frac{y}{9}\Big]_1^2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{-1}{6} - \frac{2}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\Big) = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$



(Vi kan också beräkna integralen med substitution $u = y+x$, $v = y-x$.)

Lösning till problem 4. Även denna integral kan beräknas med hjälp av substitutionen $u = y+x$, $v = y-x$. Men vi väljer att göra den med en direkt itererad integration.

$$\iint_D \sqrt{y-x}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt{y-x}\,dy$$
$$= \int_0^1 \Big[\frac{2}{3}(y-x)^{3/2}\Big]_x^1 dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{3/2}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\Big[\frac{-2}{5}(1-x)^{5/2}\}\Big]_0^1 = \frac{4}{15}.$$



Lösning till problem 5. De två ytorna skär varandra i kurvan $x^2+y^2=1/2$, $z=1/\sqrt{2}$. Volymen kan skrivas som

$$V = \iint_{x^2+y^2\le 1/2} \big(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\big)\,dxdy.$$

Övergång till polära koordinater ger $D=\{(r,\theta)\colon 0\le r\le 1/\sqrt{2},\, 0\le\theta\le 2\pi\}$. Volymen kan nu skrivas

$$V = \iint_D \big(\sqrt{1-r^2}-r\big)\,rdrd\theta = \int_0^{1/\sqrt{2}} \big(r\sqrt{1-r^2}-r^2\big)\,dr \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= 2\pi\cdot\Big[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}-\frac{r^3}{3}\Big]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}\Big(-\frac{1}{2\sqrt{2}} - -\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\Big) = \frac{2\pi}{3}\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Lösning till problem 6. Skärningen mellan ytorna fås ur ekvationen $z^2=2-z$ vilket ger $z=1$ (eller $z=-2$). I detta plan är alltså $x^2+y^2=1$ skärningskurvan. Volymen kan nu skrivas som

$$V = \iint_{x^2+y^2\le 1} \big(2-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}\big)\,dxdy.$$

Vi byter till polära koordinater vilket ger

$$V = \iint (2-r^2-r)\,rdrd\theta = 2\pi\int_0^1 (2r-r^3-r^2)\,dr$$
$$= 2\pi\Big(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\Big) = 2\pi\frac{12-3-4}{12} = \frac{5\pi}{6}.$$

För tyngdpunkten gäller att $x_T=y_T=0$ av symmetriskäl. z_T fås ur

$$z_T = \frac{1}{\text{Volym}}\int_V z\,dV$$

Vi beräknar nu

$$\int_V z\,dV = \int_0^2 z\,dz \iint_{D_z} dxdy = \int_0^2 z\text{Area}(D_z)\,dz$$
$$= \int_0^1 z\cdot\pi z^2\,dz + \int_1^2 z\cdot\pi(2-z)\,dz = \pi\Big[\frac{z^4}{4}\Big]_0^1 + \pi\Big[z^2-\frac{z^3}{3}\Big]_1^2$$
$$= \pi\Big(\frac{1}{4}+4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}\Big) = \pi\frac{11}{12}.$$

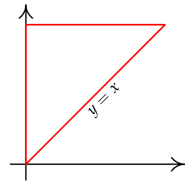
Detta ger

$$z_T = \frac{11\pi}{12}\cdot\frac{6}{5\pi} = \frac{11}{10}$$

dvs tyngdpunktens koordinater är $(0,0,11/10)$.

Lösning till problem 7. Vi kastar om integrationsordningen i integralen. Detta ger

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \Big(\int_x^{\sqrt{\pi}} \frac{x}{y} \sin y^2 \, dy \Big) \, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \Big(\int_0^{y} \frac{x}{y} \sin y^2 \, dx \Big) \, dy$$
$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \Big[\frac{x^2}{2y} \sin y^2 \Big]_0^y \, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{y}{2} \sin y^2 \, dy$$
$$= \Big[-\frac{1}{4} \cos y^2 \Big]_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}.$$



Lösning till problem 8. Vi har en kurvintegral över en sluten kurva, cirkeln med centrum i origo och radie 2. Greens formel ger

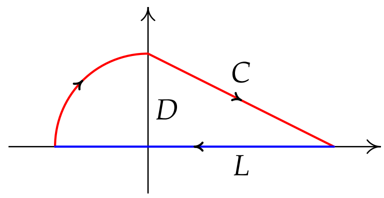
$$\int_C (x^3 - x^2 y)\, dx + xy^2 \, dy = \iint_D \Big(\frac{\partial (xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial (x^3 - x^2 y)}{\partial y} \Big) \, dxdy = \iint_D (y^2 + x^2) \, dxdy$$

där D är området innanför cirkeln C. Om vi övergår till polära koordinater så får vi

$$\iint_D r^2 \cdot r dxdy = \int_0^2 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \, d\theta = 2\pi \Big[\frac{r^4}{4} \Big]_0^2 = 8\pi.$$

Lösning till problem 9. Vi kompletterar integrationsvägen C med linjestycket L till en sluten kurva och utnyttjar Greens formel. Kurvan $C + L$ kommer att insluta området D men är negativt orienterad. Detta ger

$$\int_C + \int_L = - \iint_D (3x^2 - (3x^2 - 3)) \, dxdy = -3 \iint_D \, dxdy$$
$$= -3\text{Area}(D) = -3\big(\frac{\pi}{4} + 1\big)$$

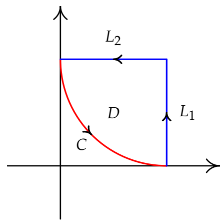


Vid beräkning av $\int_L$ med hjälp av parametrisering ser vi att $y = 0$ och $y' = 0$ vilket ger att $\int_L = 0$. Således blir $\int_C = 3\big(\frac{\pi}{4} + 1\big)$.

Lösning till problem 10. Vi kan direkt parametrisera kurvbågen som $x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \sin t$ för $\pi \leq t \leq 3\pi/2$. Detta ger

$$\int_C = \int_\pi^{3\pi/2} \big((1 + \sin t)(-\sin t) - (1 + \cos t) \cos = \int_\pi^{3\pi/2} \big(-\sin t - \cos t - 1 \big) \, dt$$
$$= \Big[\cos t - \sin t - t \Big]_\pi^{3\pi/2} = 1 - \frac{3\pi}{2} + 1 + \pi = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

En annan lösning är att komplettera kurvan till en sluten kurva, t.ex. som i figuren, och använda Greens formel. Detta ger



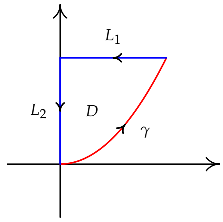
$$\int_C + \int_{L_1} + \int_{L_2} = \iint_D -2 \, dxdy = -2\text{Area}(D) = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

På L_1 är $x = 1$ vilket medför $dx = 0$ och $\int_{L_1} = -\int y \, dy = -1$. På L_2 är $y = 1$, $dy = 0$ och vi får $\int_{L_2} = \int_{L_2} dx = -1$ (obs. orienteringen på L_2). Detta ger alltså

$$\int_C + \int_{L_1} + \int_{L_2} = \int_C -1 - 1 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_C = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Lösning till problem 11. Vi gör en sluten kurva och använder Greens formel.

$$\int_\gamma + \int_{L_1} + \int_{L_2} (2x + e^y)\,dx + (xe^y - y^2)\,dy$$
$$= \iint_D (e^y - e^y)\,dxdy = 0.$$



På L_1 är $y = 1$ och $dy = 0$ vilket ger

$$\int_{L_1} (2x + e^y)\,dx + (xe^y - y^2)\,dy = \int_1^0 (2x + e)\,dx = -1 - e.$$

På L_2 är $x = 0$ och $dx = 0$ vilket ger

$$\int_{L_2} (2x + e^y)\,dx + (xe^y - y^2)\,dy = \int_1^0 -y^2\,dy = \frac{1}{3}$$

Detta ger

$$\int_\gamma -1 - e + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \int_\gamma = e + \frac{2}{3}.$$