Problem i matematik
CDEPR & CDMAT
Flervariabelanalys
VT2010

Repetitionstal inför KS1

1. Är funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2y + 7xy^2}{x^2 - xy + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

kontinuerlig i origo?

2. Transformera uttrycket $f_x + f_y$ genom att införa de nya oberoende variablerna u och v definierade genom sambanden

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = uv. \end{cases}$$

3. Bestäm normalen till ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 18$ i punkten $(2, -1, 2)$.

4. f är en C^2-funktion av en variabel sådan att $f'(5) = a$ och $f''(5) = b$. Sätt $g(x,y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ och beräkna $g_x(3,4)$ och $g_{xy}(3,4)$ uttryckta i a och b.

5. Funktionen f definieras på $\mathbf{R}^2$ genom

$$f(x,y) = \begin{cases} y \arctan \dfrac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Undersök om f är a) kontinuerlig, b) partiellt deriverbar, c) differentierbar i $(0,0)$.

6. Ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ och $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ innehåller båda punkten $(1,1,2)$. Bestäm vinkeln mellan tangentplanen i denna punkt. Ange också ekvationen (i parameterform) för tangenten i $(1,1,2)$ till skärningskurvan mellan ytorna.

7. Antag att f är en C^2-funktion av en reell variabel. Sätt $z = z(x,y) = f(x^2+y)$. Bestäm funktionen f om z uppfyller den partiella differentialekvationen

$$z_{xx} - 2xz_{xy} + (x^2+y)z = 0.$$

8. Finns det någon kurva C genom $(0,0)$ sådan att funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

har ett positivt gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$ längs C?

9. Bestäm ekvationen för varje tangentplan till ytan $x^2+y^2-z^2=1$, som är parallellt med planet $z = x+y$.

10. Låt $f(x,y) = \ln(1+xy) - x^2 + y$.

a) Bestäm i punkten $(1,0)$ f:s riktningsderivata i riktningen $(3/5, 4/5)$. Bestäm också den största riktningsderivatan till f i punkten $(1,0)$.

b) Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x,y)$ i den punkt där $(x,y) = (1,0)$.

Svar

1. Ja.

2. $f_x + f_y = \dfrac{1}{2(u^2+v^2)}\big[(u+2v)f_u + (2u-v)f_v\big]$.

3. En normalvektor ges av $(1, -1, 3)$.

4. $g_x(3,4) = \dfrac{3a}{5}, \quad g_{xy}(3,4) = \dfrac{12b}{25} - \dfrac{12a}{125}$.

5. a) Ja, kontinuerlig. b) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. c) Nej, ej differentierbar.

6. Vinkeln är $\arccos 9/\sqrt{102}$. Tangentlinjen ekvation kan skrivas $\mathbf{r}(t) = (1,1,2) + t(-4,2,1)$.

7. $f(t) = Ce^{-t^2/4}$, där C är en reell konstant.

8. T.ex. $y^2 = x$.

9. De möjliga planen är $x + y - z = 1$ och $x + y - z = -1$.

10. a) Riktningsderivatan i den angivna riktningen är $2/5$. Den maximala riktningsderivatan i punkten är $2\sqrt{2}$.
b) $2x - 2y + z - 1 = 0$

Lösningsförslag

Lösning till problem 1. Om vi inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, så kan vi skriva

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + x^2y + 7xy^2}{x^2 - xy + y^2} &= \frac{r^3(\cos^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta + 7\cos\theta\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)} \\ &= r\frac{\cos^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta + 7\cos\theta\sin^2\theta}{1 - \frac{\sin 2\theta}{2}}\end{aligned}$$

Eftersom $1 - \dfrac{\sin 2\theta}{2} \geq \dfrac{1}{2}$ så är bråket begränsat för alla θ, och faktorn r gör att gränsvärdet blir 0 då $(x, y) \to (0, 0)$, dvs

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + x^2y + 7xy^2}{x^2 - xy + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

och f är alltså kontinuerlig i origo.

Lösning till problem 2. Enligt kedjeregeln är

$$\begin{aligned} f_x &= f_u u_x + f_v v_x \\ f_y &= f_u u_y + f_v v_y \end{aligned}$$

De inre derivatorna u_x, v_x och u_y, v_y beräknas enklast genom implicit derivering av transformationsformlerna. Derivering m.a.p. x ger

$$\begin{cases} 1 = 2uu_x - 2vv_x \\ 0 = u_x v + u_v x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = \dfrac{u}{2(u^2 + v^2)} \\ v_x = \dfrac{-v}{2(u^2 + v^2)} \end{cases}$$

På samma sätt fås genom implicit derivering m.a.p.y

$$\begin{cases} 0 = 2uu_y - 2vv_y \\ 1 = u_y v + uv_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_y = \dfrac{v}{u^2 + v^2} \\ v_y = \dfrac{u}{u^2 + v^2}. \end{cases}$$

Nu blir

$$\begin{aligned} f_x + f_y &= f_u \cdot \frac{u}{2(u^2 + v^2)} + f_v \cdot \frac{-v}{2(u^2 + v^2)} + f_u \cdot \frac{v}{u^2 + v^2} + f_v \cdot \frac{u}{u^2 + v^2} \\ &= \frac{1}{2(u^2 + v^2)}\left[uf_u - vf_v + 2vf_u + 2uf_v\right] \\ &= \frac{1}{2(u^2 + v^2)}\left[(u + 2v)f_u + (2u - v)f_v\right] \end{aligned}$$

Lösning till problem 3. Den givna ytan kan tänkas som en nivåyta till funktionen $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. En normalvektor till ytan kan fås med gradientvektorn till F

$$\nabla F(x,y,z) = (2x, 4y, 6z) \Rightarrow \nabla F(2,-1,2) = (4,-4,12) = 4(1,-1,3)$$

Nu blir ekvationen för normallinjen till ytan i den givna punkten

$$(x,y,z) = (2,-1,2) + t(1,-1,3).$$

Lösning till problem 4. Kedjeregeln ger vid derivering av $g(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$g_x(x,y) = f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

och en ytterligare derivering m.a.p. y

$$g_{x,y}(x,y) = f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Insättning av $(x,y) = (3,4)$ ger

$$\begin{aligned} g_x(3,4) &= f'(5) \cdot \frac{3}{5} = \frac{3a}{5} \quad \text{och} \\ g_{xy}(3,4) &= f''(5) \cdot \frac{12}{25} - f'(5) \cdot \frac{12}{125} = \frac{12b}{25} - \frac{12a}{125}. \end{aligned}$$

Lösning till problem 5. a) f är kontinuerlig i $(0,0)$ ty

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| y \arctan\frac{x}{y} \right| \leq |y| \cdot \frac{\pi}{2} \to 0 \quad \text{då } (x,y) \to (0,0).$$

b) Här ser vi att $f(x,0) = 0$ för alla x och $f(0,y) = 0$ för alla y. Det följer omedelbart att $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
c) Om f är differentierbar i $(0,0)$ så kan vi skriva

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2}R(x,y)$$

där $R(x,y) \to 0$ när $(x,y) \to (0,0)$. I vårt fall får vi alltså

$$y \arctan\frac{x}{y} = \sqrt{x^2+y^2}R(x,y) \Rightarrow R(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \arctan\frac{x}{y}$$

Men då blir längs linjen $y = x$

$$R(x,x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2}} \arctan 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} \not\to 0 \quad \text{då } x \to 0$$

dvs funktionen är ej differentierbar i origo.

Lösning till problem 6. Låt $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6$ och $G(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 0$. Låt α beteckna vinkeln mellan nivåytorna $F(x,y,z) = 0$ och $G(x,y,z) = 0$ i punkten $(1,1,2)$. Denna vinkel är också vinkeln mellan ytornas normaler i $(1,1,2)$. Normalerna kan bestämmas med hjälp av gradientvektorn. Normal till den första ytan är $\mathbf{N}_F = \nabla F(1,1,2) = (2x,2y,2z)|_{(x,y,z)=(1,1,2)} = (2,2,4)$ och till den andra ytan $\mathbf{N}_G = \nabla G(1,1,2) = (4x,6y,2z)|_{(x,y,z)=(1,1,2)} = (4,6,4)$ Nu blir

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{N}_F \bullet \mathbf{N}_G}{||\mathbf{N}_F|| \cdot ||\mathbf{N}_G||} = \frac{(2,2,4)\cdot(4,6,4)}{||(2,2,4)|| \cdot ||4,6,4)||} = \frac{9}{\sqrt{102}}.$$

Tangentlinjen till skärningskurvan har en riktningsvektor som är vinkelrät mot de båda ytornas normalvektorer och i (punkten $(1,1,2)$ är den således parallell med

$$\mathbf{N}_F \times \mathbf{N}_G = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} = (-16,8,4) = 4(-4,2,1).$$

Vi kan skriva tangentlinjens ekvation som $(x,y,z) = (1,1,2) + t(-4,2,1)$.

Lösning till problem 7. Om $z = f(x^2+y)$ där f är en funktion av *en* variabel, så får vi med kedjeregeln (upprepade gånger)

$$\begin{aligned} z_x &= f'(x^2+y)\cdot 2x \\ z_{xx} &= f''(x^2+y)\cdot 2x \cdot 2x + f'(x^2+y)\cdot 2 \\ z_{xy} &= f''(x^2+y)\cdot 1 \cdot 2x \end{aligned}$$

Insättning i den givna differentialekvationen

$$\begin{aligned} &z_{xx} + 2xz_{xy} + (x^2+y)z = 0 \Rightarrow \\ &f''(x^2+y)\cdot 2x\cdot 2x + f'(x^2+y)\cdot 2 - 2x\cdot f''(x^2+y)\cdot 1\cdot 2x + (x^2+y)f(x^2+y) = 0 \end{aligned}$$

vilket ger

$$2f'(x^2+y) + (x^2+y)f(x^2+y) = 0$$

Om vi sätter $t = x^2 + y$ så får vi den ordinära differentialekvationen $2f'(t) + tf(t) = 0$, vilken löses som en linjär (eller separabel) första ordningens ekvation och lösningen blir $f(t) = Ce^{-t^2/4}$.

Lösning till problem 8. För att få ett gränsvärde $\neq 0$ måste täljare och nämnare gå mot 0 "lika fort" då $(x,y) \to (0,0)$ längs kurvan C. Vi kan åstadkomma detta genom att till exempel gå längs kurvan $y^2 = x$. Då blir

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+x} \quad \text{vilket går mot 1 då } x \text{ går mot 0.}$$

Lösning till problem 9. Antag att tangeringspunkten har koordinaterna (a,b,c). I denna punkt har vi normalvektor till ytan $\nabla(x^2+y^2-z^2)|_{(x,y,z)=(a,b,c)} = (2a,2b,-2c)$. Denna normal ska vara parallell med normalen till planet $x+y-z=0$ vilket ger att

$$(2a,2b,-2c) = \lambda(1,1,-1) \Rightarrow (a,b,-c) = \frac{\lambda}{2}(1,1,-1).$$

Insättning i ytans ekvation ger nu att

$$\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 2.$$

Detta ger två möjliga tangeringspunkter $(1, 1, 1)$ och $(-1, -1, -1)$ och ekvationerna för tangentplanen i dessa punkter är

$$\begin{aligned}
&(x-1) + (y-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow x + y - z - 1 = 0 \quad \text{och} \\
&(x+1) + (y+1) - (z+1) = 0 \Rightarrow x + y - z + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Lösning till problem 10. a) Riktningsderivatan i punkten $(1, 0)$ i riktning av $\mathbf{v} = (3/5, 4/5)$ (enhetsvektor) ges av $f_{\mathbf{v}}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \bullet \mathbf{v}$. Nu är

$$\nabla f(1, 0) = \left(\frac{y}{1 + xy} - 2x, \frac{x}{1 + xy} + 1\right)\Big|_{(x,y)=(1,0)} = (-2, 2).$$

Detta ger $f_{\mathbf{v}}(1, 0) = -2 \cdot \dfrac{3}{5} + 2 \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{5}$. Den maximala riktningsderivatan ges av $||\nabla f(1, 0)|| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ och fås då $\mathbf{v}$ pekar i samma riktning som gradientvektorn i $(1, 0)$.

b) Tangentplanet kan nu fås som

$$\begin{aligned}
&z = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \quad \text{vilket blir} \\
&z = -1 - 2(x - 1) + 2y \Rightarrow 2x - 2y + z - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Problem

11 Undersök om funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} y \arctan \dfrac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

a) är kontinuerlig i origo,

b) har partiella derivator i origo,

c) är differentierbar i origo.

12. Visa att om $u(x,y)$ är en C^2-funktion, sådan att $F(u'_x, u'_y) = 0$ för någon C^1-funktion F med $\nabla F \neq (0,0)$, så måste

$$u''_{xx} u''_{yy} - \left(u''_{xy}\right)^2 = 0.$$

13. Bestäm konstanten a så att i varje skärningspunkt mellan de två ytorna $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = 3$ och $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ tangentplanen till ytorna är vinkelräta.

14. Funktionen $f \in C^2(\mathbb{R})$. För $z = f(x^2 + y)$ gäller att $z_{xx} - 2xz_{xy} + (x^2 + y)z = 0$. Bestäm f.

15. En konstant c är given. En funktion i $\mathbb{R}^2$ har partiella derivator av 1:a ordningen sådana att

$$f'_x(x,y) = cx, \quad f'_y(x,y) = cy$$

för alla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Visa att f är konstant på varje fix cirkel med medelpunkt i origo. Gäller detta även om c ej är konstant?

16. Låt $F(x,y,z) = x^2 + xz^3 + yz + y^2 + 17$.

a) Visa att det finns en entydigt bestämd funktion $z = f(x,y)$ för (x,y) i en omgivning till $(-4,-1)$ så att $2 = f(-4,-1)$ och $F(x,y,f(x,y)) = 0$.

b) Visa att $(-4,-1)$ är en stationär punkt till f. Avgör om punkten är en lokal extrempunkt och i så fall av vilken typ.

17. Låt $f(x, y) = ax^2y + (x - y)^2 - 2ax - ay$ där $a \neq 0$. Verifiera att $(12, 1)$ är en stationär punkt till f och bestäm karaktären av denna för alla $a \neq 0$.

18. Bestäm ekvationen för varje tangentplan till ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ som är parallellt med planet $z = x + y$.

Lösningsförslag

Lösning till problem 11. a) Vi ser att

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \left| y \arctan \frac{x}{y} \right| \leq \frac{\pi}{2}|y|$$

vilket $\to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$. Således är funktionen kontinuerlig i origo.
b) $f(x,0) = 0$ för alla x medför att $f'_x(x,0) = 0$ och $f(0,y) = 0$ för alla y medför att $f_y(0,y) = 0$. Det följer att de partiella derivatorna är $= 0$ i origo.
c) Definitionen på differentierbarhet säger att

$$f(x,y) - f(0,0) = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2}R(x,y)$$

Här är $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$ och $f_y(0,0) = 0$ vilket ger att

$$R(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \arctan \dfrac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Detta ger att $R(x,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan 1 \not\to 0$ då $x \to 0$, dvs f är ej differentierbar i origo.

Lösning till problem 12. Låt F bero av variablerna (p,q). Om vi deriverar sambandet $F(u_x, u_y) = 0$ med avseende på x och y får vi

$$\begin{cases} F_p u''_{xx} + F_q u''_{yx} = 0 \\ F_p u''_{xy} + F_q u''_{yy} = 0 \end{cases}$$

Men $\nabla F = (F_p, F_q) \neq (0,0) \Rightarrow$ koefficientdeterminanten i detta linjära system är $= 0$, dvs $u''_{xx}u''_{yy} - \left(u''_{xy}\right)^2 = 0$.

Lösning till problem 13. $\mathbf{N}_1 = (x-a, y, z)$ är normal till $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = 3$ och $\mathbf{N}_2 = (x, y-1, z)$ är normal till $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. Ytorna vinkelräta i skärningspunkter om $\mathbf{N}_1 \bullet \mathbf{N}_2 = x(x-a) + y(y-1) + z^2 = 0$. I varje skärningspunkt gäller således ekvationssystemet

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = 3 \tag{1}$$
$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1 \tag{2}$$
$$x(x-a) + y(y-1) + z^2 = 0 \tag{3}$$

Ekv(2)−Ekv(1) ger $2ax - 2y = a^2 - 3$. Ekv(3)−Ekv(1) ger $ax - y = a^2 - 3$. Detta ger slutligen att $a^2 - 3 = 0$ eller $a = \pm\sqrt{3}$.

Lösning till problem 14. Kedjeregeln ger partiella derivator $z_x = 2xf'(x^2+y)$, $z_{xx} = 4x^2 f''(x^2+y) + 2f'(x^2+y)$ samt $z_{xy} = 2xf''(x^2+y)$. Detta ger insatt i den givna differentialekvationen

$$\begin{aligned} 4x^2 f''(x^2+y) + 2f'(x^2+y) - 2x \cdot 2xf''(x^2+y) + (x^2+y)f(x^2+y) = 0 \Rightarrow \\ 2f'(x^2+y) + (x^2+y)f(x^2+y) = 0. \end{aligned}$$

Sätt $t = x^2 + y$ och vi får att $2f'(t) + tf(t) = 0$. Detta är en linjär (eller separabel) differentialekvation med lösning $f(t) = Ce^{-t^2/4}$.

Lösning till problem 15. På en cirkel med centrum i origo och radie r gäller $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Kedjeregeln ger nu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(r\cos t, r\sin t) &= f_x(r\cos t, r\sin t)\cdot(-r\sin t) + f_y(r\cos t, r\sin t)\cdot(r\cos t) = \\ &= c(r\cos t, r\sin t)r^2\cdot(-\sin t\cos t) + c(r\cos t, r\sin t)r^2\cdot(\sin t\cos t) = 0.\end{aligned}$$

Detta visar att f är konstant på sådana cirklar.

Lösning till problem 16. a) Vi kollar först att $F(-4,-1,2) = 0$. Vidare är $F_z = 3xz^2 + y \Rightarrow F_z(-4,-1,2) = -49 \neq 0$. Implicita funktionssatsen ger att vi kan lösa ut $z = z(x,y)$ nära $(-4,-1)$ så att $z(-4,-1) = 2$ och $F(x,y,z(x,y)) = 0$.
b) Implicit derivering av $F(x,y,z(x,y)) = 0$ ger

$$2x + z^3 + 3xz^2z_x + yz_x = 0 \quad \text{(derivering m.a.p. } x\text{)} \tag{4}$$
$$3xz^2z_y + z + yz_y + 2y = 0 \quad \text{(derivering m.a.p. } y\text{)} \tag{5}$$

Insättning av $x = 4, y = -1, z = 2$ i dessa ekvationer ger

$$\begin{aligned}-8 + 8 - 48z_x(-4,-1) - z_x(-4,-1) = 0 &\Rightarrow z_x(-4,-1) = 0\\ -48z_y(-4,-1) + 2 - z_y(-4,-1) - 2 = 0 &\Rightarrow z_y(-4,-1) = 0\end{aligned}$$

Alltså är $(-4,-1)$ en stationär punkt till z.
För att avgöra vilken typ av punkt denna är beräknar vi andra derivatorna genom implicit derivering:
Derivera ekv(4) m.a.p. $x \Rightarrow$

$$2 + 3z^2z_x + 3z^2z_x + 6xz\left(z_x\right)^2 + 3xz^2z_{xx} + yz_{xx} = 0.$$

Insättning av $x = -4, y = -1, z = 2, z_x = z_y = 0$ ger $z_{xx}(-4,-1) = \dfrac{2}{49}$.
Derivera ekv(4) m.a.p.$y \Rightarrow$

$$3z^2z_y + 6xzz_yz_x + 3xz^2z_{xy} + z_x + yz_{xy} = 0.$$

Insättning av $x = -4, y = -1, z = 2, z_x = z_y = 0$ ger $z_{xy}(-4,-1) = 0$.
Derivera ekv(5) m.a.p. $y \Rightarrow$

$$6xz\left(z_y\right)^2 + 3xz^2z_{yy} + z_y + z_y + yz_{yy} + 2 = 0$$

Insättning $x = -4, y = -1, z = 2, z_x = z_y = 0$ ger $z_{yy}(-4,-1) = \dfrac{2}{49}$. Kvadratisk form i $(-4,-1)$ blir således $Q(h,k) = \dfrac{2}{49}h^2 + \dfrac{2}{49}k^2$ vilken är positivt definit. Alltså är $(-4,-1)$ en lokal minipunkt till $z(x,y)$.

Lösning till problem 17. Sätt $x = 1 + h$, $y = 1 + k$ och vi får

$$\begin{aligned}f(1+h, 1+k) &= a(1+h)^2(1+k) + (h-k)^2 - 2a(1+h) - a(1+k)\\ &= -2a + (a+1)h^2 + 2(a-1)hk + k^2 + ah^2k\end{aligned}$$

Vi ser att $f(1,1) = -2a$. Vidare finns ingen h- eller k-term, vilket visar att de partiella derivatorna $f_x(1,1)$ och $f_y(1,1)$ båda är 0. Således är $(1,1)$ en stationär punkt.
Kvadratisk form i $(1,1)$ är $Q(h,k) = (a+1)h^2 + 2(a-1)hk + k^2$ vilket efter kvadratkomplettering blir

$$Q(h,k) = \Big(k + (a-1)h\Big) + a(3-a)h^2.$$

Fall 1 $a(3-a) > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 3$. I detta fall är Q positivt definit och $(1,1)$ är lokal minimipunkt.

Fall 2 $a(3-a) < 0 \Leftrightarrow a < 0 \quad$ eller $\quad a > 3$. Q indefinit och $(1,1)$ är en sadelpunkt.

Fall 3 $a(3-a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad$ eller $\quad a = 3$. Q positivt semidefinit.
Om $a = 0$ blir $f(x,y) = (x-y)^2$ och vi ser att det blir lokalt minimum längs linjen $x = y$.
Om $a = 3$ blir $f(1+h, 1+k) - f(1,1) = (k+2h)^2 + 3h^2k$. Detta är positivt nära $(1,1)$ om $k + 2h \neq 0$. Men längs linjen $k + 2h = 0$ blir

$$f(1+h, 1+k) - f(1,1) = 3h^2k = -6h^3$$

Detta kan anta både positiva och negativa värden för små h, varför $(1,1)$ måste vara en sadelpunkt i detta fall.

Lösning till problem 18. Låt $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ och $G(x,y,z) = x + y - z$. Ytan ges då av $F = 1$ och planet av $G = 0$, dvs de är båda nivåytor. Vi bestämmer nu de punkter där $\nabla F = (2x, 2y, -2z)$ och $\nabla G = (1, 1, -1)$ är parallella. Detta ger ekvationen $\nabla F = \lambda \nabla G$ eller

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x &=& \lambda \\ 2y &=& \lambda \\ -2z &=& -\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = z = \frac{\lambda}{2}$$

Denna punkt ligger på ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$. Det finns således två möjliga tangeringspunkter $(1,1,1)$ och $(-1,-1,-1)$. De sökta tangentplanen blir $z = x + y - 1$ resp $z = x + y + 1$.