KTH Matematik
Examinator Lars Filipsson

Lösningar till Tentamen i SF1625 Envariabelanalys

den 19 december 2009 kl 09.00-14.00

1. **Bestäm i förekommande fall största och minsta värdet av funktionen $f(x) = 2x^3 - 3x^4$ på intervallet $[-1, 1]$. Lös sedan också samma problem för det öppna intervallet $(-1, 1)$.**

Lösning: Funktionen är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[-1, 1]$ varför ett största och ett minsta värde säkert antas. De antas i punkter där derivatan är noll eller i ändpunkter på intervallet (eftersom funktionen är ett plynom är den deriverbar överallt). Vi deriverar och får $f'(x) = 6x^2 - 12x^3 = 6x^2(1 - 2x)$. Vi ser att $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 1/2$. Eftersom $f(-1) = -5,\ f(0) = 0,\ f(1/2) = 1/16,\ f(1) = -1$ så ser vi att funktionens minsta värde på intervallet är -5 och funktionens största värde är $1/16$.

Intervallet $(-1, 1)$ är öppet så här är existensen av största och minsta värde inte garanterad. Vi deriverar som ovan och teckenstuderar derivatan: $f'(x) > 0$ när $x < 1/2$ varför f är strängt växande här och $f'(x) < 0$ när $x > 1/2$ varför f är strängt avtagande här. Därför har funktionen sitt största värde i punkten $1/2$, det största värdet är $1/16$. Eftersom $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -5$ men $f(x) > -5$ för alla x så tar funktionen inget minsta värde på intervallet $(-1, 1)$.

Svar: På $[-1, 1]$ är funktionens största värde $1/16$ och minsta värde -5. På $(-1, 1)$ är funktionens största värde $1/16$ medan minsta värde saknas.

2. **Bestäm med hjälp av partialbråksuppdelning samtliga primitiva funktioner till $f(x) = \dfrac{x + 13}{x^2 - 4x - 5}$.**

Lösning: Vi partialbråksuppdelar integranden. Nämnaren har nollställena -1 och 5 och vi ser att

$$\frac{x + 13}{x^2 - 4x - 5} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 5} \Longleftrightarrow x + 13 = (A+B)x + (-5A+B) \Longleftrightarrow A = -2 \text{ och } B = 3.$$

Nu kan vi integrera och vi får

$$\frac{x + 13}{x^2 - 4x - 5}\, dx = \int \left(\frac{-2}{x + 1} + \frac{3}{x - 5} \right) dx = -2 \ln |x + 1| + 3 \ln |x - 5| + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Svar: $-2\ln|x+1| + 3\ln|x-5| + C$ där C är en godtycklig konstant.

3. **A. Härled med hjälp av Riemannsummor formeln**

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

för längden L av kurvan $y = f(x)$, $a \le x \le b$.
B. Beräkna längden av kurvan $y = x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 4/3$.

Lösning A. Se läroboken av Persson o Böiers sid 324 med $x = t$ och $y = f(x)$.

Lösning B. Eftersom $\dfrac{d}{dx}x\sqrt{x} = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$ får vi med hjälp av formeln i uppgiften att längden av kurvan blir

$$L = \int_0^{4/3} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^{4/3} = \frac{56}{27}.$$

Svar: 56/27

4. **Använd ett Maclaurinpolynom (Taylorpolynom kring origo alltså) av grad 3 till en lämpligt vald funktion för att beräkna ett närmevärde till $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Felets storlek behöver ej utredas.**

Lösning: Tredje gradens Maclaruinpolynom till e^x är $p_3(x) = 1+x+x^2/2+x^3/6$ och eftersom $1/\sqrt{e} = e^{-1/2}$ är det sökta närmevärdet $p_3(-1/2) = 1-1/2+1/8-1/48 = 29/48$.

Svar: 29/48

5. **Befolkningarna i länderna A och B växer båda exponentiellt. I land A är fördubblingstiden 50 år och i land B är fördubblingstiden 150 år. Idag bor det dubbelt så många människor i land B som i land A. Hur länge dröjer det innan befolkningarna i de båda länderna är lika stora?**

Lösning: Låt $A(t)$ vara folkmängden i land A vid tiden t år och $B(t)$ motsvarande för land B. Enligt uppgiften är då $A(t) = Ce^{at}$ och $B(t) = 2Ce^{bt}$, för några konstanter C, a, b, om $t = 0$ betyder idag. Om funktionen A fördubblas på 50 år måste $2Ce^{a\cdot 0} = Ce^{a\cdot 50}$ dvs $a = \ln 2/50$. På samma sätt: om funktionen B dubbleras på 150 år så måste $4Ce^{b\cdot 0} = 2Ce^{b\cdot 150}$, varur fås att $b = \ln 2/150$.

Vi har alltså att $A(t) = Ce^{(\ln 2/50)t}$ och $B(t) = 2Ce^{(\ln 2/150)t}$ och befolkningarna är lika när $Ce^{(\ln 2/50)t} = 2Ce^{(\ln 2/150)t}$ dvs när $(\ln 2/50)t = \ln 2 + (\ln 2/150)t$ dvs när $t = 75$

Svar: om 75 år.

6. **Använd variabelsubstitutionen $t = \sin x$ för att beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x}\, dx$.**

Lösning: Vi använder substitutionen $t = \sin x$. Då är $dt = \cos x\, dx$ och $x = 0$ motsvarar $t = 0$ och $x = \pi/2$ motsvarar $t = 1$. Vi får:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$$

SVar: $\ln 2$

7. **Betrakta differentialekvationen $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 10 \sin t$.**
A. Ge exempel på ett fysikaliskt förlopp som kan modelleras av denna typ av differentialekvation.
B. Verifiera att $y(t) = \sin t - 2\cos t$ är en lösning till den givna differentialekvationen.
C. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

A. Se läroboken av Persson o Böiers t ex sidan 396.

B. Derivera och sätt in i ekvationen. Om $y(t) = \sin t - 2\cos t$ så är $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 10 \sin t$.

C. Lösningen är på formen $y = y_h + y_p$ där y_h är allmänna lösningen till den homogena ekvationen och y_p är en partikulärlösning. Som y_p kan vi enligt deluppgift B ta $y_p(t) = \sin t - 2\cos t$. Återstår att bestämma y_h. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 4r + 3 = 0$ har lösningar $r = -1$ och $r = -3$ varför $y_h(t) = Ce^{-t} + De^{-3t}$ där C och D är godtyckliga konstanter. Vi får att diffekvationen i uppgiften har allmän lösning

$$y(t) = Ce^{-t} + De^{-3t} + \sin t - 2\cos t.$$

där C och D är godtyckliga konstanter.

Svar: $y(t) = Ce^{-t} + De^{-3t} + \sin t - 2\cos t$, där C och D är godtyckliga kosntanter.

8. **Visa att funktionen $f(x) = 2\arcsin(2x) + \sqrt{1-4x^2}$ är inverterbar. Bestäm definitionsmängden för inversen $f^{-1}(x)$ och beräkna också $(f^{-1})'(1)$.**

Lösning. Vi ser att definitionsmängden för f är intervallet $[-1/2, 1/2]$ och att funktionen är kontinuerlig på hela detta intervall. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

och vi ser direkt att vår funktion är deriverbar i $(-1/2, 1/2)$ och att $f'(x) > 0$ för alla x i detta intervall. Det följer att f är strängt växande och därmed inverterbar. Vidare: eftersom $f(-1/2) = -\pi$ och $f(1/2) = \pi$ och f antar alla mellanliggande värden så är värdemängden för f intervallet $[-\pi, \pi]$. Detta är då också definitionsmängden för inversen f^{-1}. Vi har också att $f(0) = 1$ vilket ger att $f^{-1}(1) = 0$ och $(f^{-1})'(1) = 1/f'(0) = 1/4$.

9. **Förklara i vilken mening $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$ är en generaliserad integral och beräkna den med hjälp av substitutionen $t = 1 - \ln x$.**

Lösning. Integralen är generaliserad eftersom integranden $\to \infty$ när $x \to e^-$. Om vi sätter $t = 1 - \ln x$ så är $(-1/x)\,dx = dt$ och $x = e$ svarar mot $t = 0$ och $x = 1$ svarar mot $t = 1$. Vi får alltså

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{c\to 0}[2\sqrt{t}]_c^1 = 2.$$

Svar: 2.

10. **En regelbunden n-hörning ligger med alla sina hörn på enhetscirkeln. Beräkna dess area. Vad händer med denna area då n växer obegränsat? Stämmer det?**

Lösning. Vår n-hörning är uppbyggd av n stycken likbenta trianglar, i vilka de två sidor som är lika har längd 1 eftersom de är radier i enhetscirkeln. Varje sådan triangel har arean $\cos(\pi/n)\sin(\pi/n)$. Arean av n-hörningen är alltså $n\cos(\pi/n)\sin(\pi/n)$. Eftersom n-hörningen närmar sig enhetscirkeln när n växer obegränsat och

$$\lim_{n\to\infty} n\cos(\pi/n)\sin(\pi/n) = \lim_{n\to\infty}\left(\pi\frac{\cos(\pi/n)\sin(\pi/n)}{\pi/n}\right) = \pi$$

så är det väl rimligt att säga att det stämmer!