KTH Matematik
Examinator Lars Filipsson

Modell-Tentamen 1 i SF1625 Envariabelanalys

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontinuerliga examinationsmoment i kursen, på det sätt som framgår av kurs-PM. Den som är godkänd på ett sådant moment har automatiskt 3-4 poäng på motsvarande uppgift, som då inte behöver lösas. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 pooäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

Tydliga och väl motiverade lösningar krävs. Inga hjälpmedel. Lycka till!

1. Bestäm i förekommande fall största och minsta värdet av funktionen $f(x) = xe^{-2x}$ på intervallet $[-1, 1]$. Besvara sedan också samma fråga för det öppna intervallet $(-1, 1)$.

2. Para ihop nedanstående integrander och primitiva funktioner. OBS: några blir över. Visa för varje par du hittar precis hur de hänger ihop genom en formel som innehåller antingen ett integraltecken eller också en deriveringssymbol.

$$\frac{x^4}{4!} \qquad 4!\left(-\frac{1}{x}\right)^5 \qquad 2\ln(x^4+1) \qquad 6\sinh x$$

$$x^2\ln x \qquad 2\arctan(x^2) \qquad \ln x^2 + 2\ln(e/x) \qquad \frac{24}{x^5}$$

$$0 \qquad 3e^x + 3e^{-x} \qquad 5!\left(-\frac{1}{x}\right)^6 \qquad 2x\ln x$$

$$\frac{4x}{x^4+1} \qquad 6e^x + 6e^{-x} \qquad \frac{x^5}{5!} \qquad x^2\ln x - \frac{x^2}{2}$$

3. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = 5x^{-3/2}$ och $y = \sqrt{x}$ samt linjen $x = 1$ roteras ett varv runt x-axeln.

4. Man konstruerar en ränna av tre likadana plankor som är 10 cm breda. En planka ligger på marken, de båda andra har vinkel θ med horisontalen. Hur ska θ väljas för att rännan ska rymma maximal mängd vatten?

5. På vilka intervall växer funktionen $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$ när $0 < |x| < e$.

6. Skissa grafen till funktionen $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$. Avgör speciellt om f har några lokala maxima eller minima samt om grafen har lodrät tangent någonstans.

7. Visa hur man kan använda Maclaurinutvecklingar för att beräkna gränsvärden genom att beräkna $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right)$.

8. A. Vad menas med att en funktion är kontinuerlig i en punkt x_0 ?
B. Ge exempel på en kontinuerlig funktion f som uppfyller att

$$\int_1^4 f(x)\,dx = -1 \quad \text{och} \quad \int_4^9 f(x)\,dx = 5.$$

9. Visa att $\sum_{k=1}^{n-1} \ln k < n\ln n - n + 1 < \sum_{k=2}^{n} \ln k$. Tips: betrakta integralen $\int_1^t \ln x\,dx$.

10. Finn ett tredjegradspolynom $p(x)$ sådant att $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$, $p'''(0) = f'''(0)$, där $f(x) = \int_0^x e^{t^2+t}\,dt$.