KTH Matematik
Examinator Lars Filipsson

Tentamen i SF1625 Envariabelanalys

den 19 december 2009 kl 09.00-14.00

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontinuerliga examinationsmoment i kursen, på det sätt som framgår av kurs-PM. Den som är godkänd på ett sådant moment har automatiskt 3-4 poäng på motsvarande uppgift, som då inte behöver lösas. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 pooäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

Tydliga och väl motiverade lösningar krävs. Inga hjälpmedel. Lycka till!

1. Bestäm i förekommande fall största och minsta värdet av funktionen $f(x) = 2x^3 - 3x^4$ på intervallet $[-1, 1]$. Lös sedan också samma problem för det öppna intervallet $(-1, 1)$.

2. Bestäm med hjälp av partialbråksuppdelning samtliga primitiva funktioner till $f(x) = \dfrac{x+13}{x^2-4x-5}$.

3. A. Härled med hjälp av Riemannsummor formeln
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$
för längden L av kurvan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.
B. Beräkna längden av kurvan $y = x\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4/3$.

4. Använd ett Maclaurinpolynom (Taylorpolynom kring origo alltså) av grad 3 till en lämpligt vald funktion för att beräkna ett närmevärde till $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Felets storlek behöver ej utredas.

5. Befolkningarna i länderna A och B växer båda exponentiellt. I land A är fördubblingstiden 50 år och i land B är fördubblingstiden 150 år. Idag bor det dubbelt så många människor i land B som i land A. Hur länge dröjer det innan befolkningarna i de båda länderna är lika stora?

6. Använd variabelsubstitutionen $t = \sin x$ för att beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x}\, dx$.

7. Betrakta differentialekvationen $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 10 \sin t$.
A. Ge exempel på ett fysikaliskt förlopp som kan modelleras av denna typ av differentialekvation.
B. Verifiera att $y(t) = \sin t - 2 \cos t$ är en lösning till den givna differentialekvationen.
C. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

8. Visa att funktionen $f(x) = 2 \arcsin(2x) + \sqrt{1 - 4x^2}$ är inverterbar. Bestäm definitionsmängden för inversen $f^{-1}(x)$ och beräkna också $(f^{-1})'(1)$.

9. Förklara i vilken mening $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln x}}$ är en generaliserad integral och beräkna den med hjälp av substitutionen $t = 1 - \ln x$.

10. En regelbunden n-hörning ligger med alla sina hörn på enhetscirkeln. Beräkna dess area. Vad händer med denna area då n växer obegränsat? Stämmer det?