Institutionen för matematik, **KTH**
A. Sola

SF1624 Algebra och Geometri för M1: Kontrollskrivning 2B
2 oktober 2009, kl.10.15-11.00

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Dessutom delas sammanlagt 3 poäng ut för presentationen av lösningarna. Sammanlagt kan alltså 12 poäng uppnås på skrivningen. Minst 6 poäng krävs för 3 bonuspoäng till uppgift 2 på tentamen. Minst 9 poäng krävs för 4 bonuspoäng till uppgift 2 på tentamen.

Observera att svaren **skall** motiveras. Inga hjälpmedel är tillåtna på skrivningen.

1. Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Lösning Vi beräknar determinanten genom att använda rad-och kolonnutveckling. I första steget utvecklar vi efter fjärde raden och i andra steget väljer vi första kolonnen. Detta ger (observera tecknen!)

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot ((-2) \cdot 1 - 3 \cdot 2) = -8.$$

2. a) Förklara varför vektorerna

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Var god vänd!

utgör en bas för vektorrummet $\mathbf{R}^3$.

b) Ange koordinatvektorerna för

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

med avseende på basen $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$. **Lösning** (a)Vi har givet tre vektorer i $\mathbf{R}^3$. Vektorerna $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ och $\mathbf{v_3}$ är vidare linjärt oberoende. Detta kan exempelvis inses genom beräkning av determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

En känd sats ger nu vid handen att de givna vektorerna utgör en bas för $\mathbf{R}^3$. (b) Vi provar oss fram och ser att $\mathbf{u} = 2\mathbf{v_1} - 3\mathbf{v_2} + 0\mathbf{v_3}$ och att $\mathbf{w} = 0\mathbf{v_1} + 1\mathbf{v_2} + 1\mathbf{v_3}$. Detta ger (i radvektornotation) att $(\mathbf{u})_B = (2, -3, 0)$ samt $(\mathbf{w})_B = (0, 1, 1)$.

Alternativt kan vi bestämma koordinaterna för bfu på sedvanligt sätt genom att vi löser det linjära ekvationssystemet $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3}$. Motsvarande gäller för $\mathbf{w}$.

3. Bestäm dimensionen av nollrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Kan man, utan att utföra några ytterligare beräkningar, dra någon slutsats om dimensionen av kolonnrummet till A?

Lösning Vi observerar att de två nedersta raderna i den givna matrisen A är multiplar av varandra. Detta medför att nollrummet är minst endimensionellt. Å andra sidan ser vi att första raden i matrisen inte är en multipel av rad två. Detta medför att nollrummet verkligen är av dimension 1.

Enligt en känd sats gäller

$$\dim(\text{nollrum}(A)) + \dim(\text{radrum}(A)) = n,$$

där n är antalet kolonner i A. Eftersom radrummet till en matris har samma dimension som kolonnrummet, och matrisen A innehåller tre kolonner, fås

$$\dim(\text{kolonnrum}(A)) = 3 - \dim(\text{nollrum}(A)).$$

Vi kan nu utan att utföra ytterligare beräkningar dra slutsatsen att kolonnrummet till A är ett tvådimensionellt delrum till $\mathbf{R}^3$.