Institutionen för matematik, **KTH**
A. Sola

SF1624 Algebra och Geometri för M1: Kontrollskrivning 1B 16 september 2009, kl.15.15-16.00 Lösningar

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Dessutom delas sammanlagt 3 poäng ut för presentationen av lösningarna. Sammanlagt kan alltså 12 poäng uppnås på skrivningen. Minst 6 poäng krävs för 3 bonuspoäng till uppgift 1 på tentamen. Minst 9 poäng krävs för 4 bonuspoäng till uppgift 1 på tentamen.

Observera att svaren **skall** motiveras. Inga hjälpmedel är tillåtna på skrivningen.

1. Polynomet $3x^4 + 9x^3 + 12x^2 + 36x$ har ett nollställe i $x = -2i$. Bestäm samtliga nollställen till polynomet.

Lösning Vi noterar först att det givna polynomet $p(x) = 3x^4+9x^3+12x^2+36x$ är reellt, det vill säga, att alla koefficienterna i polynomet är reella tal. En känd sats garanterar nu att konjugatet till det givna komplexa nollstället, $x = 2i$, också är ett nollställe. Vi drar härur slutsatsen att $(x+2i)(x-2i) = x^2 + 4$ är en faktor i polynomet p.

Vi ser vidare att $x = 0$ är ett nollställe till polynomet. Vi bryter ut faktorn $3x$ ur $p(x)$ och betraktar $q(x) = x^3+3x^2+4x+12$. Polynomdivision visar att $q(x) = (x^2+4)(x+3)$. Alltså utgör $x = 0$, $x = \pm 2i$ samt $x = -3$ nollställena till polynomet p.

2. Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k) = \frac{n^3 - n}{3} \quad \text{för} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Lösning Vi börjar med att behandla basfallet $n = 1$. Vänsterledet är då

$$1^2 - 1 = 0,$$

medan högerledet är

$$\frac{1^3 - 1}{3} = 0.$$

Var god vänd!

Påståendet är därmed sant i basfallet.

Vi antar nu att

$$\sum_{k=1}^{N}(k^2-k)=\frac{N^3-N}{3}$$

är sant för något N och vi ska visa att

$$\sum_{k=1}^{N+1}(k^2-k)=\frac{(N+1)^3-(N+1)}{3} \tag{1}$$

följer. Vänsterledet i (1) kan skrivas

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}(k^2-k)+(N+1)^2-(N+1)&=\sum_{k=1}^{N}(k^2-k)+N^2+2N+1-N-1\\&=\sum_{k=1}^{N}(k^2-k)+N^2+N\end{aligned}$$

Vi ersätter summan med $(N^3-N)/3$ i enlighet med vårt induktionsantagande och får att vänsterledet i (1) är lika med

$$\frac{N^3-N}{3}+N^2+N=\frac{N^3-N+3N^2+3N}{3}=\frac{N^3+3N^2+3N+1-N-1}{3}.$$

Efter en omskrivning ser vi att uttrycket i högerledet är lika med $((N+1)^3-(N+1))/3$, vilket skulle visas. Induktionsaxiomet ger oss nu att påståendet är sant för alla $n\geq 1$.

3. a) Beskriv vilka möjligheter som finns för skärningen av två plan i rummet. Illustrera gärna med bilder.

b) Avgör om planen som definieras av ekvationerna $4y+z-2=0$ och $x+z+5=0$ skär varandra. Ange den eventuella skärningsmängden.

Lösning a) Planen kan sammanfalla, de kan skära varandra i en linje eller vara parallella men disjunkta. För bilder, se kursboken, sidan 157.

b) Punkter som ligger i skärningen mellan de två planen uppfyller båda de definierande ekvationerna samtidigt, det vill säga, vi har

$$4y+z-2=x+z+5$$

för sådana punkter. Ekvationen ovan ger att $x=-7+4y$. Vi sätter nu $y=t$ för $t\in\mathbb{R}$. Vi vet redan att $x=-7+4t$ och från ekvationen $4y+z-2=0$

följer också $z = 2 - 4t$. Skärningslinjen mellan de två planen beskrivs alltså av

$$(x, y, z) = (-7, 0, 2) + t(4, 1, -4), \quad t \in \mathbb{R}$$