KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen
Lördagen den 5 juni, 2010

DEL A

(1) Betrakta det komplexa talet $w = 3 - i$.

(a) Skriv potenserna w^n på rektangulär form, för $n = -2, -1, 0, 1, 2$. **(3)**

(b) Bestäm ett andragradspolynom med reella koefficienter som har w som ett av sina nollställen. **(1)**

Lösning. (a) Vi har att $w^1 = w = 3 - i$ och $w^0 = 1$. Vidare har vi att $w^2 = (3-i)(3-i) = 9 + i^2 - 3i - 3i = 8 - 6i$. För att beräkna w^{-1} kan vi förlänga med konjugatet och får

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3}{10} + \frac{i}{10}.$$

Vi kan beräkna w^{-2} antingen som $(w^{-1})^2$ eller som $(w^2)^{-1}$ och vi får

$$w^{-2} = \frac{1}{w^2} = \frac{\bar{w}^2}{|w^2|^2} = \frac{8+6i}{10^2} = \frac{8+6i}{100} = \frac{2}{25} + \frac{3i}{50}.$$

(b) Ett polynom med reella koefficienter som har w som ett nollställe måste också ha konjugatet, $\bar{w}$, som nollställe. Om ledande koefficienten är 1 får vi

$$p(z) = (z-w)(z-\bar{w}) = z^2 - (w+\bar{w})z + w\bar{w} = z^2 - 6z + 10.$$

$\square$

Svar:

a) $w^{-2} = 1/25 + 3i/50$, $w^{-1} = 3/10 + i/10$, $w^0 = 1$, $w = 3 - i$ och $w^2 = 8 - 6i$.

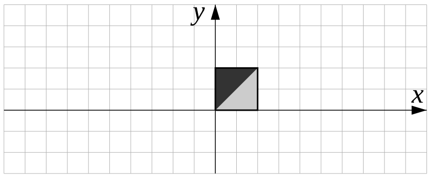
b) Polynomet $p(z) = z^2 - 6z + 10$ har $w = 3 - i$ som ett nollställe.

(2) Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ har standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna potenserna A^n, för $n = -2, -1, 0, 1, 2$. **(3)**

(b) Åskådliggör verkan av den linjära avbildningen T på det kvadratiska området Ω som ges av figuren nedan. [1] **(1)**



FIGUR 1. Området Ω

Lösning. (a) Vi har i allmänhet att $A^1 = A$ och $A^0 = I$. Vi kan beräkna kvadraten genom matrismultiplikation och får

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 3\cdot 1 + 1\cdot 3 \\ (-1)\cdot 3 + 3\cdot(-1) & (-1)\cdot 1 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vi kan beräkna inversen, A^{-1}, genom Gausselimination eller med Cramers regel. Vi får med Gausselimination

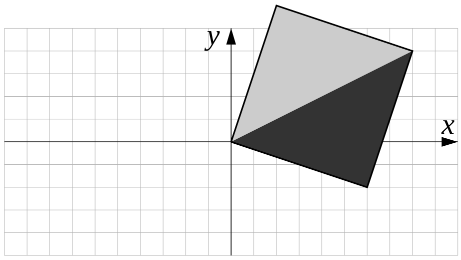
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{3}r_1 \\ r_2 + \frac{1}{3}r_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \begin{bmatrix} r_1 - \frac{1}{10}r_2 \\ \frac{3}{10}r_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right)$$

vilket visar att $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Vi kan nu beräkna A^{-2} antingen som $(A^2)^{-1}$ eller som $(A^{-1})^2$ och får

$$\begin{aligned} A^{-2} &= \tfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 3\cdot 3 + (-1)\cdot 1 & 3\cdot 1 + (-1)\cdot 3 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) De fyra hörnpunkterna i området kommer att bilda hörnpunkter i bildområdet eftersom linjestycken avbildas på linjestycken. Hörnpunkternas koordinatvektorer är 0, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ och $\overline{e}_1 + \overline{e}_2$. Standardbasvektorerna avbildas på första och andra kolonnen i matrisen och deras summa på summan av kolonnerna. Alltså blir hörnpunkterna i bilden $(0,0)$, $(3,-1)$, $(1,3)$ och $(2,2)$.

[1] Använd egenskaperna hos linjära avbildningar, exempelvis att linjestycken avbildas på linjestycken.



FIGUR 2. Bilden av området Ω under T.

$\square$

Svar:

(a) $A^{-2} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ och $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$.

(3) (a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet som ges av

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ -2 & 2 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

med hjälp av Gausselimination. **(3)**

(b) Ange ett högerled för vilket motsvarande ekvationssystem saknar lösning. **(1)**

Lösning. (a) Vi använder Gauss-Jordans metod på totalmatrisen för att kunna läsa av lösningarna till systemet. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 4 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & 8 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 + r_1 \\ 2r_3 + r_1 \\ r_4 + r_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 4 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & -5 & -6 & 7 \\ 0 & 4 & 12 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \\ r_3 + -r_2 \\ r_4 + -2r_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & -6 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 + r_3 \\ r_2 - \frac{3}{2}r_3 \\ -\frac{1}{2}r_3 \\ r_4 + 3r_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_1 \\ \frac{1}{2}r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi kan nu se att x_3 och x_5 är fria variabler eftersom motsvarande kolonner saknar ledande ettor. Därmed väljer vi två parametrar, s och t, och låter $x_3 = s$ och $x_5 = t$. Vi kan sedan lösa ut x_1, x_2 och x_4 med hjälp av de tre nollskilda ekvationerna. Vi får

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + s - t \\ x_2 &= 1 - 3s - 2t \\ x_4 &= -1 - 2t \end{aligned}$$

och vi kan skriva samtliga lösningarna som

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1, 2, 0, -1, 0) + s(1, -3, 1, 0, 0) + t(-1, -2, 0, -2, 1)$$

för reella tal s och t.

(b) Ekvationssystemet saknar lösning om högerledet i den sista raden inte är noll efter eliminationen. Vi kan uppnå det exempelvis genom att sätta högerledet till $(0, 0, 0, 1)^t$ i den eliminerade totalmatrisen och sedan räkna baklänges. Eftersom r_4 inte kommer med i de andra raderna under beräkningens gång kommer högerledet inte att ändras. Alltså saknar systemet lösningar om högerledet är $(0,0,0,1)^t$.

$\square$

Svar:

a) Samtliga lösningarna ges av $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1, 2, 0, -1, 0) + s(1, -3, 1, 0, 0) + t(-1, -2, 0, -2, 1)$, för reella tal s och t.

b) Systemet saknar lösning om högerledet är exempelvis $(0, 0, 0, 1)$.

(4) Fibonaccitalen har använts för att modellera vissa typer av tillväxtsituationer. De definieras av att $F_0 = F_1 = 1$ och $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, för $n \geq 2$. Den relativa tillväxten ges av kvoterna $\alpha_n = F_{n+1}/F_n$, för $n \geq 0$. Med hjälp av rekursionen ovan får vi att $\alpha_n = (F_n + F_{n-1})/F_n = 1 + 1/\alpha_{n-1}$, för $n \geq 1$. Använd detta för att med hjälp av induktion visa att den relativa tillväxten uppfyller

$$\frac{3}{2} \leq \alpha_n \leq 2$$

för alla heltal $n \geq 1$. **(4)**

Lösning. Vi börjar med basfallet som gäller $n = 1$ och vi vill kontrollera att $\frac{3}{2} \leq \alpha_1 \leq 2$. Vi får enligt rekursionen att $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 1 = 2$ och därmed är $\alpha_1 = F_2/F_1 = 2/1 = 2$. Alltså ligger $\alpha_1 = 2$ inom intervallet $\frac{3}{2} \leq \alpha_1 \leq 2$.

Vi antar nu att olikheterna gäller för $n = k$ för något heltal $k \geq 1$. Vi har då att $\frac{3}{2} \leq \alpha_k \leq 2$. Vi vill nu visa att olikheterna också gäller för $n = k + 1$. Vi har enligt rekursionen att

$$\alpha_{k+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_k}$$

och därmed har vi att

$$1 + \frac{1}{2} \leq \alpha_{k+1} \leq 1 + \frac{1}{3/2}$$

vilket är detsamma som

$$\frac{3}{2} \leq \alpha_{k+1} \leq \frac{5}{3}.$$

Eftersom $\frac{5}{3} \leq 2$ gäller därmed olikheterna även för $n = k + 1$.

Genom att vi har visat basfallet och induktionssteget har vi genom induktionsprincipen visat att olikheterna gäller för alla $n \geq 1$. $\square$

(5) (a) Förklara hur man kan använda projektion för att bestämma det kortaste avståndet från en punkt till ett plan och illustrera metoden genom att bestämma avståndet från planet som innehåller punkterna $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 3, 3)$ och $C = (-1, 5, 2)$ till punkten $D = (3, 1, 0)$. **(3)**

(b) Förklara varför svaret också kan fås med hjälp av formeln

$$d = \frac{|(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}|}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}$$

genom att tolka täljare och nämnare geometriskt. **(1)**

Lösning. (a) Om vi har en vektor $\overline{u}$ från planet till punkten D kan vi sedan projicera den på normalvektorn till planet och får då den kortaste vektor som går från planet till punkten D. Det sökta avståndet är längden av denna projektion. För att få reda på en normalvektor till planet kan vi ta två vektorprodukten mellan två vektorer i planet, exempelvis $\overline{AB}$ och $\overline{AC}$. VI kan välja $\overline{u} = \overline{AD}$.

I det givna exemplet har vi $\overline{u} = \overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (3, 1, 0) - (1, 0, -1) = (2, 1, 1)$, $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2, 3, 3) - (1, 0, -1) = (1, 3, 4)$ och $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (-1, 5, 2) - (1, 0, -1) = (-2, 5, 3)$.

Vi har att

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (1, 3, 4) \times (-2, 5, 3) = (3 \cdot 3 - 4 \cdot 5, 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 3, 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-2)) = (-11, -11, 11) = -11(1, 1, -1).$$

och därmed är $\overline{n} = (1, 1, -1)$ en normalvektor till planet.

När vi projicerar $\overline{AD} = (2, 1, 1)$ på $\overline{n}$ får vi

$$\mathrm{Proj}_{\overline{n}} \overline{AD} = \frac{\overline{n} \cdot \overline{AD}}{\overline{n} \cdot \overline{n}} \overline{n} = \frac{(1, 1, -1) \cdot (2, 1, 1)}{(1, 1, -1) \cdot (1, 1, -1)} (1, 1, -1) = \frac{2}{3}(1, 1, -1).$$

Längden på denna projektion ger det kortaste avståndet till planet från punkten, vilket är

$$d = \frac{2}{3}\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

(b) Trippelprodukten $(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}$ ger ett tal vars belopp är volymen av den parallellepiped som spänns upp av $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ och $\overline{AD}$. Längden av vektorprodukten $\overline{AB} \times \overline{AC}$ motsvarar på samma sätt arean av den parallellogram som spänns upp av $\overline{AB}$ och $\overline{AC}$. Eftersom volymen av en parallellepiped ges av produkten av en bottenarea med motsvarande höjd ger den givna formeln höjden av parallellepipeden mot sidan som innehåller A, B och C. Denna höjd är å andra sidan det kortaste avståndet från D till det plan som spänns upp av just den sidan.

□

Svar:

a) Kortaste avståndet från D till planet som innehåller A, B och C ges av $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

(6) (a) Bestäm om möjligt en basbytesmatris P som diagonaliserar den antidiagonala matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3)

(b) Förklara varför egenvektorerna till A också är egenvektorer till A^2. (Det omvända är dock inte nödvändigtvis är sant.) **(1)**

Lösning. (a) Vi kan börja med att bestämma egenvärdena till A med hjälp av den karaktäristiska ekvationen, $\det(A - \lambda I) = 0$. Genom att utveckla determinanten efter andra raden får vi

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4) = (3-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Därmed är den karaktäristiska ekvationen $(3-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-2) = 0$ som har de tre rötterna $\lambda = -2$, $\lambda = 2$ och $\lambda = 3$.

För att hitta egenvektorer som svarar mot de tre egenvärdena löser vi de homogena ekvationssystemen med totalmatris $(A - \lambda I|0)$ för de tre värdena på λ.

Vi får för $\lambda = -2$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right. \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_1 \\ \frac{1}{5}r_2 \\ r_3 - \frac{1}{2}r_1 \end{bmatrix} \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

och lösngarna är $t(-2, 0, 1)$, för reella tal t.

För $\lambda = 2$ får vi

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right. \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}r_1 \\ r_2 \\ r_3 + \frac{1}{2}r_1 \end{bmatrix} \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

och lösngarna är $t(2, 0, 1)$, för reella tal t.

För $\lambda = 3$ får vi

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right. \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}r_1 \\ r_3 + \frac{1}{3}r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

och lösngarna är $t(0, 1, 0)$, för reella tal t.

En bas av egenvektorer till A ges därmed av $(-2,0,1)$, $(2,0,1)$ och $(0,1,0)$ vi kan diagonalisera A med basbytesmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

och får

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Om $\overline{v}$ är en egenvektor till A finns ett egenvärde så att $A\overline{v} = \lambda\overline{v}$. Om vi multiplicerar detta till vänster med A får vi

$$A^2\overline{v} = A\lambda\overline{v} = \lambda A\overline{v} = \lambda^2\overline{v}.$$

Alltså är $\overline{v}$ en egenvektor till A^2 med egenvärde λ^2.
(I exemplet ovan ser vi att A^2 är en diagonalmatris med diagonalelement 4, 9, 4. Därmed är stanardbasen egenvektorer, men bara den mittersta av dem, $\overline{e}_2$, är egenvektor till A. Detta ger oss också att egenvärdena till A måste uppfylla $\lambda^2 = 4$ eller $\lambda^2 = 9$, utan att behöva beräkna karaktäristiska ekvationen.)

□

Svar:

a) basbytesmatrisen $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonaliserar A.

Var god vänd!

DEL B

(7) Vid en mätning har man erhållit fem punkter $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, 2)$, $P_3 = (2, 3)$, $P_4 = (3, 5)$ och $P_5 = (4, 6)$. Den teoretiska modellen säger att det skulle finnas ett linjärt samband, $y = ax + b$, för några parametrar a och b.

(a) Använd minsta-kvadratmetoden för att bestämma de värden på parametrarna som bäst stämmer med mätningarna. **(3)**

(b) Vilka av de fem punkterna har störst, respektive minst, avvikelse mot den framtagna minsta-kvadratlösningen? **(1)**

Lösning. (a) Vi skriver upp det ekvationssystem som motsvarar att samtliga punkter ligger på linjen $y = ax + b$:

$$\begin{cases} 0 \cdot a & + & b & = & 1 \\ 1 \cdot a & + & b & = & 2 \\ 2 \cdot a & + & b & = & 3 \\ 3 \cdot a & + & b & = & 5 \\ 4 \cdot a & + & b & = & 6 \end{cases}$$

VIlket kan skrias som $Ax = B$, där $x = (a, b)^t$. Med minsta-kvadratmetoden vet vi att det värde på x som gör att skillnaden mellan höger- och vänsterled blir så liten som möjligt ges av lösningen till *normalekvationen*, $A^tAx = A^tB$. Vi har att

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^tB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Med Gausselimination på totalmatrisen för normalekvationen får vi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 47 \\ 10 & 5 & 17 \end{array} \right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - 2r_2 \\ \frac{1}{5} r_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 13 \\ 2 & 1 & \frac{17}{5} \end{array} \right) \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{10} r_1 \\ r_2 - \frac{1}{5} r_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{13}{10} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array} \right)$$

Alltså ges minsta-kvadratlösningen av $a = 1{,}3$ och $b = 0{,}8$.

(b) Vi kan beräkna y-värdena enligt den linjära modellen för de fem x-värdena och får $y_1 = 1{,}3 \cdot 0 + 0{,}8 = 0{,}8$, $y_2 = 1{,}3 \cdot 1 + 0{,}8 = 2{,}1$, $y_3 = 1{,}3 \cdot 2 + 0{,}8 = 3{,}4$, $y_4 = 1{,}3 \cdot 3 + 0{,}8 = 4{,}7$, $y_5 = 1{,}3 \cdot 4 + 0{,}8 = 6{,}0$. Avvikelserna mot de uppmätta värdena är

$$\Delta y_1 = 0,2, \qquad \Delta y_2 = 0,1, \qquad \Delta y_3 = 0,4, \qquad \Delta y_4 = 0,3, \qquad \Delta y_5 = 0,0.$$

Alltså är det den femte punkten som har minst avvikelse, $0{,}0$, och den tredje som har störst avvikelse, $0{,}4$.

$\square$

Svar:

(a) Parametrarna är $a = 1{,}3$ och $b = 0{,}8$ enligt minsta-kvadratmetoden.

b) Den femte punkten har minsta avvikelse och den tredje störst.

(8) Låt $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ vara en ortonormal bas för $\mathbb{R}^n$ med avseende på den Euklidiska inre produkten. Betrakta dessa vektorer som $n \times 1$-matriser och bilda $n \times n$-matrisen

$$A = a_1\overline{v}_1\overline{v}_1^t + a_2\overline{v}_2\overline{v}_2^t + \cdots + a_n\overline{v}_n\overline{v}_n^t,$$

där $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är reella tal.

(a) Visa att A är en symmetrisk $n \times n$-matris. **(1)**

(b) Visa att $\overline{v}_i$ är en egenvektor till A med egenvärde a_i, för $i = 1, 2, \ldots, n$. **(1)**

(c) Använd detta för att bestämma en symmetrisk matris med egenvektorerna $(1, 0, -1)$, $(1, 1, 1)$ och $(1, -2, 1)$ där motsvarande egenvärden är 2, 3 respektive 6. **(2)**

Lösning. (a) I allmänhet gäller för en matris B att BB^t är symmetrisk eftersom $(BB^t)^t = (B^t)^tB^t = BB^t$. I det här fallet har vi bildat A som en summa av n stycken sådana matriser, och eftersom transponanet av en summa är summan av transponaten, är också summan symmetrisk.

(b) Eftersom vektorenrna utgör en ortonormal bas har vi att

$$\overline{v}_i^t\overline{v}_j = \langle \overline{v}_i, \overline{v}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j, \\ 0, & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

Vi får därmed att $A\overline{v}_i$ ges av

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\overline{v}_j\overline{v}_j^t \right) v_i = a_i\overline{v}_i,$$

vilket visar att $\overline{v}_i$ är en egenvektor med egenvärde a_i, för $i = 1, 2, \ldots, n$.

(c) Den givna basen är ortogonal men inte ortonormal. Vi normerar den genom att dela på vektorernas längder och får den ortonormala basen som

$$\overline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \qquad \overline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \qquad \text{oh} \qquad \overline{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1).$$

Vi beräknar sedan de tre matriserna $\overline{v}_i\overline{v}_i^t$, för $i = 1, 2, 3$ och får

$$\overline{v}_1\overline{v}_1^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \overline{v}_2\overline{v}_2^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \overline{v}_3\overline{v}_3^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom egenvärdena ska vara $a_1 = 2$, $a_3 = 3$ och $a_3 = 6$ får vi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Svar:

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ är en matris med de givna egenvärdena och egenvektorerna.

(9) Låt $P_3 = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 | a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ vara vektorrummet av reella polynom av grad högst tre. Definiera den linjära avbildningen $T : P_3 \longrightarrow P_3$ genom

$$T(p(x)) = D^2((x^2 + 1)p(x)) - 12p(x)$$

där $p(x) \in P_3$ och där $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ avser derivering två gånger.

(a) Bestäm något polynom $p(x)$ i P_3 sådant att $T(p(x)) = 14x^3$. **(1)**

(b) Bestäm en bas i P_3 för vilken avbildningens matris är diagonal. **(3)**

Lösning. (a) För att lättare hantera problemet väljer vi en bas för P_3 som $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3, \overline{f}_4\} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Vi kan sedan beräkna matrisen för avbildningen med avseende på denna matris och får

$$\begin{aligned}
T(\overline{f}_1) &= T(1) = D^2(1 + x^2) - 12 = 0 + 2 - 12 = -10 = 1 \cdot \overline{f}_1 \\
T(\overline{f}_2) &= T(x) = D^2(x + x^3) - 12x = 0 + 6x - 12x = -6x = -6 \cdot \overline{f}_2 \\
T(\overline{f}_3) &= T(x^2) = D^2(x^2 + x^4) - 12x^2 = 2 + 12x^2 - 12x^2 = 2 = 2 \cdot \overline{f}_1 \\
T(\overline{f}_4) &= T(x^3) = D^2(x^3 + x^5) - 12x^3 = 6x + 20x^3 - 12x^3 = 6x + 8x^3 = 6 \cdot \overline{f}_2 + 8 \cdot \overline{f}_4
\end{aligned}$$

Matrisen ges därmed av

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vi söker en vektor som uppfyller $A\overline{v} = (0, 0, 0, 14)^t$ och eftersom matrisen är triangulär kan vi lösa systemet direktr genom $x_4 = 14/8 = 7/4$, $x_3 = t$, $x_2 = x_4 = 7/4$ och $x_1 = \frac{1}{5}t$, där t är en reell parameter. Som polynom motvarar detta

$$p(x) = 7/4(x^3 + x) + \frac{t}{5}(1 + 5x^2)$$

(b) För att bestämma en bas som diagonaliserar matrisen A ser vi på egenvärden och egenvektorer. Det går att läsa av egenvärdena efter diagonalen eftersom matrisen är övertriangulär och vi får $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = 0$ och $\lambda_4 = 8$. Från de två första kolonnerna i A ser vi att $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$ är egenvektorer med egenvärden -10, respektive -6. Egenvektorn med egenvärde noll ges av basen för nollrummet som enligt ovan är $\overline{f}_1 + 5\overline{f}_3 = 1 + 5x^2$. Till slut löser vi ut den sista egenvektorn från det övertriangulära systemet $(A - 8I|0)$, dvs

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -18 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

där vi får $x_4 = t$, $x_3 = 0$, $x_2 = 6x_4/14 = 3t/7$ och $x_1 = \frac{1}{9}x_3 = 0$. Alltså ges en egenvektor till egenvärdet $\lambda_4 = 8$ av $\frac{3}{7}\overline{f}_2 + \overline{f}_4 = \frac{1}{7}(3x + 7x^3)$.

En bas som gör att matrisen för T blir diagonal är alltså

$$\overline{g}_1 = 1, \overline{g}_2 = x, \overline{g}_3 = 1 + 5x^2 \quad \text{och} \quad \overline{g}_4 = 3x + 7x^3.$$

$\square$

Svar:

(a) $p(x) = 7/4(x^3 + x)$ uppfyller $T(p(x)) = 14x^3$.

(b) Basen $\overline{g}_1 = 1, \overline{g}_2 = x, \overline{g}_3 = 1 + 5x^2$ och $\overline{g}_4 = 3x + 7x^3$ gör att matrisen för T blir diagonal.

(10) Låt (x_1, x_2, x_3) vara koordinater för $\mathbb{R}^3$ med avseende på standardbasen $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ och låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som bestäms av

$$T(\overline{e}_1) = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3, \quad T(\overline{e}_2) = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3, \quad T(\overline{e}_3) = \overline{e}_2 + 3\overline{e}_3.$$

Låt V vara delrummet av $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(a) Visa att det för varje vektor $\overline{v}$ i V gäller att bildvektorn $T(\overline{v})$ ligger i V. **(1)**

(b) Låt $S : V \to V$ vara den linjära avbildning som man får från T genom att bara använda T på vektorer i V. Bestäm matrisen för avbildningen S med avseende på någon bas för V och bestäm egenvärdena för denna matris. **(2)**

(c) Förklara varför egenvärdena som bestämdes i 10b också är egenvärden till standardmatrisen för T. **(1)**

Lösning. (a) Låt $\overline{v} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3$ vara en vektor i V. Då har vi att $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ och vi får att

$$\begin{aligned} T(\overline{v}) &= a_1T(\overline{e}_1) + a_2T(\overline{e}_2) + a_3T(\overline{e}_3) \\ &= a_1(2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3) + a_2(\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3) + a_3(= \overline{e}_2 + 3\overline{e}_3) \\ &= (2a_1 + a_2)\overline{e}_1 + (a_1 + 2a_2 + a_3)\overline{e}_2 + (a_1 + a_2 + 3a_3)\overline{e}_3 \end{aligned}$$

Alltså ges summan av koordinaterna för $T(\overline{v})$ av

$$(2a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2 + a_3) + (a_1 + a_2 + 3a_3) = 4(a_1 + a_2 + a_3) = 0$$

eftersom $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Alltså ligger $T(\overline{v})$ också i V om $\overline{v}$ ligger i V.

(b) Vi väljer en bas för V som består av vektorerna $\overline{f}_1 = \overline{e}_1 - \overline{e}_3$ och $\overline{f}_2 = \overline{e}_2 - \overline{e}_3$ genom att lösa ekvationssystemet som bara består av ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. När vi använder avbildningen på dessa vektorer får vi

$$T(\overline{f}_1) = T(\overline{e}_1) - T(\overline{e}_3) = (2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3) - (\overline{e}_2 + \overline{3}e_3) = 2\overline{e}_1 - 2\overline{e}_3 = 2\overline{f}_1$$

och

$$T(\overline{f}_2) = T(\overline{e}_2) - T(\overline{e}_3) = (1\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3) - (\overline{e}_2 + \overline{3}e_3) = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 - 2\overline{e}_3 = \overline{f}_1 + \overline{f}_2$$

Matrisen för S med avseende på vår valda bas blir därmed

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och egenvärdena är 2 och 1.

(c) Att 2 och 1 är egenvärden till matrisen A betyder att det finns vektorer $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_2$ i V sådana att $S(\overline{v}_1) = 1 \cdot \overline{v}_1$ och $S(\overline{v}_2) = 2\overline{v}_2$. Eftersom värdet för S och T sammanfaller för vektorer i V är dessa vektorer också egenvektorer med samma egenvärde för standardmatrisen för T.

□

Svar:

(b) Egenvärdena är 1 och 2.