KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen
Lördagen den 17 april 2010

DEL A

(1) Visa med induktion att

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{2}{i(i+1)} = \frac{n-1}{n+1},$$

för alla heltal $n \geq 2$. **(4)**

Lösning. Vi börjar med basfallet, $n = 2$, då vi har att vänsterledet är

$$\frac{2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3} \qquad \text{och högerledet är} \qquad \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Alltså stämmer påståendet för $n = 2$.

Antag nu att påståendet gäller för något $n = k$, där $k \geq 2$, dvs att

$$\sum_{i=2}^{k} \frac{2}{i(i+1)} = \frac{k-1}{k+1}.$$

Vi vill nu visa att det också gäller för $n = k+1$. Vi får då att vänsterledet är

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{k+1} \frac{2}{i(i+1)} &= \sum_{i=2}^{k} \frac{2}{i(i+1)} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k-1)(k+2)+2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2-k+2k-2+2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+k}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+2}.
\end{aligned}$$

och högerledet är

$$\frac{(k+1)-1}{(k+1)+1} = \frac{k}{k+2}.$$

Alltså stämmer påståendet också för $n = k+1$ och enligt induktionsprincipen har vi visat att det gäller för alla heltal $n \geq 2$. $\square$

(2) Betrakta ekvationssystemet med totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 4+t \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 1 & 4-t \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

där t är en reell parameter.

(a) Red ut för vilka värden på parametern t som systemet har en unik lösning, ingen lösning, eller oändligt många lösningar. **(3)**

(b) Förklara varför det inte kan finnas något ytterligare alternativ till antalet lösningar till systemet. **(1)**

Lösning. a) För att komma åt hur lösningsmängden ser ut kan vi använda Gausselimination på totalmatrisen. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 4+t \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 1 & 4-t \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_4 \\ r_1 - 3r_4 \\ r_2 \\ r_3 - 2r_4 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & t-11 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & -6-t \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ \frac{1}{2}r_3 \\ r_2 - 2r_3 \\ r_4 - \frac{5}{2}r_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & t-3 \\ 0 & 0 & 3 & 4-t \end{array}\right) \sim\sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \frac{1}{3}r_3 \\ r_4 - r_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{t}{3}-1 \\ 0 & 0 & 0 & 7-2t \end{array}\right)$$

I och med att det finns en ledande etta varje kolonn finns det högst en lösning till systemet och det finns en lösning till systemet om och endast om det inte finns någon ledande etta i högerledet. Det betyder att det finns en unik lösning om $t = 7/2$ och inte någon lösning alls annars. Det kan aldrig finnas oändligt många lösningar.

b) Om det finns två olika lösningar till ett linjärt ekvationssystem kan vi bilda skillnaden mellan dessa. Detta blir en lösning till det homogena systemet, dvs ett system med samma koefficientmatris men högerled noll. Vi kan nu lägga till en godtyckligt multipel av den homogena lösningen till någon av våra lösningar och vi får på det viset oändligt många lösningar. Därmed är antalet lösningar 0, 1 eller ∞.

□

Svar:

a) Det finns en unik lösning om $t = 7/2$ och annars ingen lösning alls.

(3) En triangel i rummet har hörn i punkterna $A = (-2,-2,-1)$, $B = (2,1,-1)$ och $C = (-1,1,3)$. Använd skalärprodukten för att avgöra om vinkeln vid hörnet B är större än eller mindre än $60°$. **(4)**

Lösning. För att beräkna vinkeln vid hörnet B ser vi på vektorerna $\overline{u} = \overline{BA}$ och $\overline{v} = \overline{BC}$.

Vi kan räkna ut koordinaterna för dessa vektorer som

$$\overline{u} = \overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB} = (-2,-2,-1) - (2,1,-1) = (-4,-3,0)$$

och

$$\overline{v} = \overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = (-1,1,3) - (2,1,-1) = (-3,0,4).$$

Därmed har vi att $|\overline{u}| = \sqrt{\overline{u}\cdot\overline{u}} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2+0^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ och $|\overline{v}| = \sqrt{\overline{v}\cdot\overline{v}} = \sqrt{(-3)^2+0^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Om β är vinkeln mellan sidorna BA och BC får vi nu att

$$\cos\beta = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{u}|\cdot|\overline{v}|} = \frac{(-4,-3,0)(-3,0,4)}{5\cdot 5} = \frac{12}{25}.$$

Eftersom $\cos 60° = \frac{1}{2}$ och $\frac{12}{25} < \frac{1}{2}$ har vi att $\beta > 60°$. (Cosinus är en avtagande funktion från $0°$ till $180°$.) $\square$

Svar: Vinkeln vid B är större än $60°$.

(4) (a) Låt $p(x)$ vara ett polynom med reella koefficienter och låt a vara ett reellt tal. Visa att $p(a)$ är resten vid polynomdivision av $p(x)$ med $x-a$. **(2)**

(b) Den symmetriska matrisen A har karaktäristisk ekvation $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. Bestäm samtliga egenvärden till A om det är känt att det finns en vektor $\overline{v} \neq 0$ sådan att $A\overline{v} = 2\overline{v}$. **(2)**

Lösning. a) Vi vet att resten vid division med $x-a$ antingen är noll, eller har lägre grad än $x-a$, vilket betyder att det är ett konstant polynom. Vi har att $p(x) = q(x)(x-a)+r$ och om vi sätter in $x=a$ i detta uttryck får vi $p(a) = q(a)(a-a)+r = 0+r = r$, vilket visar att $p(a)$ är lika med resten vid division med $(x-a)$. Speciellt ser vi att resten är noll precis om $x=a$ är ett nollställe till $p(x)$, vilket är faktorsatsen.

b) Att $A\overline{v} = 2\overline{v}$ betyder att $\overline{v}$ är en egenvektor med egenvärde 2 eftersom $\overline{v} \neq 0$. Eftersom egenvärdena är rötter till den karakteristiska ekvationen har vi att $\lambda - 2$ är en faktor i $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$, och med polynomdivision får vi

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 1).$$

De övriga egenvärdena måste nu vara rötter till $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ vilket är ekvivalent med $(\lambda-1)^2 = 0$, dvs $\lambda = 1$.

Alltså är A:s egenvärden 1 och 2.

$\square$

Svar:

b) Egenvärdena till A är 1 och 2.

(5) (a) Härled formeln för projektion av en vektor $\overline{v}$ på en nollskild vektor $\overline{u}$ genom att använda egenskapen att $\overline{v} - \mathrm{Proj}_{\overline{u}}\overline{v}$ är vinkelrät mot $\overline{u}$ och att $\mathrm{Proj}_{\overline{u}}\overline{v}$ är parallell med $\overline{u}$. **(1)**

(b) Använd formeln för projektionen från del a) till att bestämma den punkt på linjen genom origo med riktningsvektor $(1, 2, -1)$ som har kortast avstånd till punkten $P = (2, 0, 1)$. **(3)**

Lösning. a) Eftersom $\mathrm{Proj}_{\overline{u}}\overline{v}$ är parallell med $\overline{u}$ har vi $\mathrm{Proj}_{\overline{u}}\overline{v} = a\overline{u}$, för något reellt tal a. Vi kan bestämma a genom att använda villkoret att $\overline{v} - \mathrm{Proj}_{\overline{u}}\overline{v}$ är vinkelrät mot $\overline{u}$ vilket med användning av skalärprodukten ger oss att

$$\overline{u} \cdot (\overline{v} - \mathrm{Proj}_{\overline{u}}\overline{v}) = 0 \iff \overline{u} \cdot (\overline{v} - a\overline{u}) = 0 \iff \overline{u} \cdot \overline{v} - a\overline{u} \cdot \overline{u} = 0.$$

Därmed kan vi lösa ut a eftersom $\overline{u}$ är nollskild och får att

$$a = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{\overline{u} \cdot \overline{u}}$$

och

$$\mathrm{Proj}_{\overline{u}}\overline{v} = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{\overline{u} \cdot \overline{u}}\overline{u}.$$

b) Om Q är den punkt på linjen som ligger närmast P har vi att $\overline{OQ}$ är projektionen av $\overline{OP}$ på rikningsvektorn, $\overline{u}$, för linjen. Därmed får vi att

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= \mathrm{Proj}_{\overline{u}}\overline{OP} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{u}}{\overline{u} \cdot \overline{u}}\overline{u} = \frac{(2, 0, 1) \cdot (1, 2, -1)}{(1, 2, -1) \cdot (1, 2, -1)}(1, 2, -1) \\ &= \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)}(1, 2, -1) = \frac{1}{6}(1, 2, -1).\end{aligned}$$

Alltså är den närmsta punkten $Q = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$.

$\square$

Svar:

b) $Q = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$ är den punkt på linjen $t(1, 2, -1)$ som ligger närmast $P = (2, 0, 1)$.

(6) (a) Förklara varför determinanten av en basbytesmatris inte kan vara noll. **(1)**

(b) Bestäm basbytesmatrisen från basen $F = \{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}$ till basen $G = \{(1,0,-1),(1,-1,0),(1,1,1)\}$. Använd sedan basbytesmatrisen för att beräkna koordinaterna relativt basen G för den vektor som har koordinaterna $(2,1,0)$ relativt basen F. **(3)**

Lösning. a) Ett basbyte går att invertera och därmed kommer också basbytesmatrisen att vara inverterbar. En matris är inverterbar om och endast om determinanten inte är noll.

b) Vi kan lätt skriva upp basbytesmatriserna från baserna F och G till standardbasen E eftersom dessa matriser har basvektorerna uttryckta i standardabasen som kolonner:

$$_ET_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad _ET_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan sedan beräkna basbytesmatrisen $_GT_F$ som $_GT_{E\,E}T_F = (_ET_G)^{-1}{}_ET_F$. Denna kan vi få fram genom Gausselimination på totalmatrisen $(_ET_G|_ET_F)$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + r_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -r_2 \\ r_3 + r_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - \frac{1}{3}r_3 \\ r_2 + \frac{1}{3}r_3 \\ \frac{1}{3}r_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Vi kan kotrollera räkningarna genom

$$_ET_{G\,G}T_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = {}_ET_F.$$

Vi kan nu använda basbytesmatrisen $_GT_F$ till att beräkna koordinaterna i basen G för den vektor $\overline{v}$ som har koordinaterna $[\overline{v}]_F = (2,1,0)$ relativt basen F:

$$[\overline{v}]_G = {}_GT_F[\overline{v}]_F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 0 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

□

Svar:

b) Basbytesmatrisen från basen F till basen G ges av $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Vektorn som har koordinater $(2, 1, 0)$ relativt basen F har koordinater $(-3, 0, 5)$ relativt basen G.

DEL B

(7) Låt T vara en spegling av planet i linjen $x = y$ och låt S vara en spegling av planet i linjen $x = 0$.

(a) Bestäm standardmatrisen A för sammansättningen ST. **(2)**

(b) Bestäm minsta positiva heltal n sådant att A^n är identitetsmatrisen. **(1)**

(c) Ge en geometrisk tolkning av sammansättningen ST. **(1)**

Lösning. a) Vi ser på hur de två standardbasvektorerna påverkas av den sammansatta avbildningen. $\overline{e}_x = (1, 0)$ avbildas först genom T till $\overline{e}_y = (0, 1)$ eftersom den positiva y-axeln är speglingen av den positiva x-axeln i linjen $x = y$. Vi går sedan vidare med S och får att speglingen i y-axeln fixerar $\overline{e}_y$. Alltså har vi att $ST(\overline{e}_x) = \overline{e}_y$. Vidare har vi för $\overline{e}_y$ att den först avbildas på $\overline{e}_x$ genom speglingen i linjen $x = y$ och sedan vidare till $-\overline{e}_x$ genom att speglingen i y-axeln skickar $\overline{e}_x$ på $-\overline{e}_x$. Därmed är $ST(\overline{e}_y) = -\overline{e}_x$. Standardmatrisen för ST blir därmed

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Vi kan beräkna successiva potenser av A genom

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I,$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(-I) = -A$$

och

$$A^4 = (A^2)^2 = (-I)^2 = I.$$

Därmed är $n = 4$ det minsta positiva heltal sådant att $A^4 = I$.

c) I och med att $\overline{e}_x$ avbildas på $\overline{e}_y$ och $\overline{e}_y$ avbildas på $-\overline{e}_x$ genom ST innebär den sammansatta avbildningen en rotation med 90° i positiv riktning för basvektorerna. Därmed betyder den en sådan rotation för alla vektorer i planet och den geometriska tolkningen av ST är en vridning av planet ett kvarts varv i positiv led, vilket väl stämmer överens med resultatet i b).

$\square$

Svar:

a) Standardmatrisen för ST är $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Det minsta positiva heltal sådant att $A^n = I$ är $n = 4$.

c) Den sammansatta avbildningen motsvarar en vridning av planet ett kvarts varv i positiv led.

(8) Symmetriska matriser är som bekant alltid diagonaliserbara, men det är annorlunda med *antisymmetriska* matriser, dvs matriser som uppfyller $A^t = -A$.

(a) Visa att en antisymmetrisk 2×2-matris bara är diagonaliserbar om den är nollmatrisen. **(1)**

(b) Visa att samma sak gäller även för antisymmetriska 3×3-matriser. **(3)**

Lösning. a) En antisymmetrisk 2×2-matris kan skrivas som

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

för något reellt tal a eftersom $a_{11} = -a_{11}$ och $a_{22} = -a_{22}$ innebär att $a_{11} = a_{22} = 0$. Den karakteristiska ekvationen för A ges nu av $\det(A - \lambda I) = 0$, dvs

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + a^2 = 0.$$

Denna ekvation har reella rötter bara om $a = 0$, dvs om A är nollmatrisen. För att matrisen ska vara diagonaliserbar krävs att det finns egenvärden. Alltså är A diagonaliserbar bara om $A = 0$, vilket skulle visas.

b) Om A är en antisymmetrisk 3×3-matris kan vi skriva den som

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

eftersom $a_{ii} = -a_{ii}$ innebär att $a_{ii} = 0$ för $i = 1, 2, 3$ och $a_{ij} = -a_{ji}$, för $i \neq j$. Vi behöver har reella egenvärden för att A ska vara diagonaliserbar och vi beräknar den karaktäristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ som

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} -\lambda & a & -b \\ -a & -\lambda & c \\ b & -c & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & c \\ -c & -\lambda \end{pmatrix} - a \det \begin{pmatrix} -a & c \\ b & -\lambda \end{pmatrix} - b \det \begin{pmatrix} -a & -\lambda \\ b & -c \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 + c^2) - a(a\lambda - bc) - b(ac + b\lambda) = -\lambda^3 - \lambda(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Vi kan skriva om den karakteristiska ekvationen som

$$\lambda(\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

och denna saknar icke-reella lösningar om och endast om $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, dvs om och endast om $A = 0$.

Mer allmänt skulle man kunna visa att antisymmetriska matriser inte är diagonaliserbara genom att $A\overline{v}$ är ortogonal mot $\overline{v}$. Det kan därmed inte finnas några egenvektorer med nollskilda egenvärden. Vi får detta genom $\overline{v} \cdot (A\overline{v}) = \overline{v}^t A \overline{v} = (\overline{v}^t A \overline{v})^t = \overline{v}^t A^t \overline{v} = -\overline{v} \cdot (A\overline{v})$. Därmed är $\overline{v} \cdot (A\overline{v}) = 0$.

$\square$

(9) Låt V vara vektorrummet av polynom av grad högst två, dvs

$$V = \{p(x) \mid p(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Definiera

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

för $p(x), q(x) \in V$.

(a) Visa att $\langle\cdot,\cdot\rangle$ är en inre produkt på V. **(1)**

(b) Använd Gram-Schmidts metod för att bilda en ortogonal bas för V utgående från basen $E = \{1, x, x^2\}$. **(3)**

Lösning. a) Vi behöver visa att $\langle\cdot,\cdot\rangle$ är en symmetrisk bilinjär form och att $\langle p(x), p(x)\rangle \geq 0$ med likhet bara om $p(x) = 0$. Vi har att

$$\begin{aligned}\langle p(x), q(x)\rangle &= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)\\ &= q(-1)p(-1) + q(0)p(0) + q(1)p(1) = \langle q(x), p(x)\rangle\end{aligned}$$

vilket visar att den är symmetrisk. Därmed räcker det att visa att den är linjär i den ena komponenten och vi har att

$$\begin{aligned}&\langle p(x), aq_1(x) + bq_2(x)\rangle\\ &= p(-1)(aq_1(-1) + bq_2(-1)) + p(0)(aq_1(0) + bq_2(0)) + p(1)(aq_1(1) + bq_2(1))\\ &= a(p(-1)q_1(-1) + p(0)q_1(0) + p(1)q_1(1)) + b(p(-1)q_2(-1) + p(0)q_2(0) + p(1)q_2(1))\\ &= a\langle p(x), q_1(x)\rangle + b\langle p(x), q_2(x)\rangle,\end{aligned}$$

vilket visar detta.

Vidare har vi att $\langle p(x), p(x)\rangle = p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2 \geq 0$, med likhet om och endast om $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Eftersom ett andragradpolynom inte kan ha tre olika nollställen får vi i så fall att $p(x) = 0$. Därmed har vi visat att $\langle\cdot,\cdot\rangle$ är en inre produkt på V.

b) Låt nu $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ och $f_3(x) = x^2$. Vi använder Gram-Schmidts metod och låter först $g_1(x) = f_1(x)$. Sedan definierar vi

$$g_2(x) = f_2(x) - \frac{\langle f_2(x), g_1(x)\rangle}{\langle g_1(x), g_1(x)\rangle} g_1(x) = x - \frac{(-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1}{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1} 1 = x - 0 = x$$

och till slut

$$\begin{aligned}g_3(x) &= f_3(x) - \frac{\langle f_3(x), g_1(x)\rangle}{\langle g_1(x), g_1(x)\rangle} g_1(x) - \frac{\langle f_3(x), g_2(x)\rangle}{\langle g_2(x), g_2(x)\rangle} g_2(x)\\ &= x^2 - \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1}{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1} 1 - \frac{1\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 1}{((-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 1} 1\\ &= x^2 - \frac{2}{3}\cdot 1 - 0\cdot x = x^2 - \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□

Svar:

b) Den ortogonala basen som fås genom Gram-Schmidts metod är $\{1, x, x^2 - \frac{2}{3}\}$.

(10) (a) Låt A och B vara godtyckliga kvadratiska matriser av samma storlek och λ en skalär. Visa att $BA = \lambda A$ om och endast om A:s kolonnvektorer ligger i nollrummet till matrisen $B - \lambda I$. **(2)**

(b) Antag nu att

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Låt V vara vektorrummet av alla 2×2 matriser och låt $T : V \to V$ vara den linjära avbildning som ges av $T(A) = BA$. Visa att 2 är ett egenvärde för T och bestäm en bas för motsvarande egenrum. **(2)**

Lösning. a) Vi kan skriva om ekvationen $BA = \lambda A$ som $(B-\lambda I)A = 0$. Att produkten av två matriser är lika med nollmatrisen betyder att alla kolonner i den senare ligger i nollrummet till den förra. I det här fallet betyder det att kolonnerna i A ligger i nollrummet till B.

b) Vi kan använda oss av den föregående deluppgiften för att dra slutsatsen att egenrummet består av alla matriser vars kolonner är linjärkombinationer av egenvektorerna till B med egenvärde 2.

För att visa att 2 är ett egenvärde behöver vi se att 2 är ett egenvärde för B. Vi kan lösa ut dessa genom att använda Gausselimination på totalmatrisen $(B - 2I|0)$ och får då

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

där vi multiplicerat den första raden med -1 och lagt två gånger den första raden till den andra. Slutsatsen är att 2 är ett egenvärde till B och att motsvarande egenvektorer ges av nollskilda multipler av $(2, 1)$. Egenrummet som söks är därmed alla matriser vars kolonner är multipler av $(2, 1)^t$, dvs

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2s & 2t \\ s & t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

En bas för detta egenrum ges av

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

eftersom varje matris i W kan skrivas som en linjärkombination av dessa basvektorer på ett unikt sätt.

□