KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen
Måndagen den 15 mars, 2010

DEL A

(1) (a) Förklara hur man kan beräkna kvadratrötterna ur ett komplext tal w genom att ansätta $z = a + ib$ och identifiera real- och imaginärdelar i ekvationen $z^2 = w$. **(1)**

(b) Använd detta för att bestämma rötterna till ekvationen $z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i = 0$ skrivna på rektangulär form. **(3)**

Lösning. a) Vi kan ansätta $z = a+ib$ där a och b är reella tal och vi får då om $w = c+id$ att

$$(a+ib)^2 = c + id \iff a^2 - b^2 + 2iab = c + id.$$

När vi identifierar real- och imaginärdel i höger- och vänsterled får vi de två ekvationerna:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= c, \\ 2ab &= d. \end{cases}$$

För att lösa detta ekvationssystem kan vi antingen lösa ut b som $d/2a$ i den andra och sätta in i den första för att sedan lösa den andragradsekvation i a^2 som vi då får, eller använda att $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 = c^2 + d^2$. I det senare fallet får vi då att

$$2a^2 = (a^2+b^2) + (a^2-b^2) = \sqrt{c^2+d^2} + c$$

och

$$2b^2 = (a^2+b^2) - (a^2-b^2) = \sqrt{c^2+d^2} - c.$$

Det räcker att lösa ut a från den första av dessa eftersom vi sedan kan lösa ut b genom ekvationen $2ab = d$. Vi får a som

$$a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2} + \frac{c}{2}}.$$

b) Vi börjar med att kvadratkomplettera ekvationen och får

$$\begin{aligned} &(z-2-3i)^2 - (2+3i)^2 = 2 - 16i \\ \iff &(z-2-3i)^2 = 4 - 9 + 12i + 2 - 16i \\ \iff &(z-2-3i)^2 = -3 - 4i. \end{aligned}$$

Vi ansätter nu $z - 2 - 3i = a + ib$ som i deluppgift a) och får

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= -3, \\ 2ab &= -4. \end{cases}$$

och vi får lösningen genom

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25,$$

vilket ger $a^2 + b^2 = 5$. Vidare ger detta med den första ekvationen att

$$2a^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) = 5 - 3 = 2,$$

dvs $a = \pm 1$. Detta ger insatt i $2ab = -4$ att $b = -2/a = \mp 2$. Vi får lösningen till den ursprungliga ekvationen som

$$z = 2 + 3i \pm (1 - 2i)$$

dvs $z_1 = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$ och $z_2 = 2 + 3i - (1 - 2i) = 1 + 5i$.

□

Svar:

b) Lösningarna till ekvationen är $z_1 = 3 + i$ och $z_2 = 1 + 5i$.

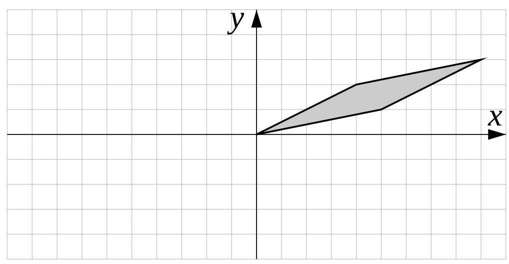
(2) Ett område Ω i planet $\mathbb{R}^2$ avbildas genom den linjära avbildningen T med standardmatris

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

på parallellogrammen med hörn i punkterna $(0,0)$, $(5,1)$, $(4,2)$ och $(9,3)$.

(a) Bestäm området Ω. (Använd egenskaperna hos linjära avbildningar, exempelvis att linjestycken avbildas på linjestycken.) **(3)**

(b) Jämför arean av Ω med arean av bilden $T(\Omega)$. **(1)**



FIGUR 1. Bilden, $T(\Omega)$, av området Ω under avbildningen T.

Lösning. a) Eftersom linjestycken avbildas på linjestycken genom en linjär avbildning räcker det att ta reda på var hörnen avbildas. En linjär avbildning avbildar nollvektorn på nollvektorn. Dessutom är $(9,3)$ summan av vektorerna $(5,1)$ och $(4,2)$ i en parallellogram. Det innebär att vi bara beöver ta reda på vad urbilderna av $(5,1)$ och $(4,2)$ är. Vi ställer upp detta som ett ekvationssystem med två högerled och får då totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{rr|rr} -1 & -4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

och med Gausselimination får vi

$$\left(\begin{array}{rr|rr} -1 & -4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} -r_1 \\ r_2 + r_1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 4 & -5 & -4 \\ 0 & -3 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} r_1 + \frac{4}{3}r_2 \\ -\frac{1}{3}r_2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Vi har kommit fram till att

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alltså måste Ω ges av parallellogrammen med hörn i punktern $(0,0)$, $(3,-2)$, $(4,-2)$ och $(3,-2)+(4,-2) = (7,-4)$.

Vi kan också lösa uppgiften genom att bestämma matrisen för den omvända avbildningen, dvs matrisen för T^{-1}, som är inversmatrisen av A. Med hjälp av kofaktorerna kan vi skriva upp A^{-1} som

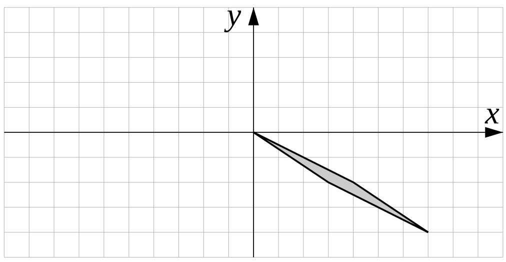
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

eftersom $\det(A) = 1\cdot(-1) - 4\cdot(-1) = -1 + 4 = 3$ och vi kan sedan beräkna

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 4\cdot 1 \\ -1\cdot 5 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

och

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 4\cdot 2 \\ -1\cdot 4 - 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



FIGUR 2. Det ursprungliga området Ω.

b) Arean av parallellogrammen $T(\Omega)$ kan beräknas som beloppet av determinanten av matrisen med vektorerna $(5,1)$ och $(4,2)$ som kolonnvektorer. Arean är alltså

$$\left|\det\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = |5\cdot 2 - 4\cdot 1| = |10 - 4| = 6$$

areaenheter. Matrisen A har determinant 3 och därmed förstoras arean med en faktor 3 genom T, vilket vi också kan se genom att arean av paralellogrammen Ω ges av determinanten

$$\left|\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\right| = |3\cdot(-2) - 4\cdot(-2)| = |-6+8| = 2.$$

$\square$

Svar:

a) Området Ω är parallellogrammen med hörn i $(0,0)$, $(3,-2)$, $(4,-2)$ och $(7,-4)$.

b) Området $T(\Omega)$ har area 6 areaenheter och är tre gånger så stort som Ω i och med att determinanten för A är 3.

(3) Den vinkelräta projektionen på planet som ges av ekvationen $x-2y+3z=0$ är en linjär avbildning och kan därmed beskrivas med hjälp av en matris. Bestäm standardmatrisen för denna projektion genom att se på hur den verkar på standardbasvektorerna. **(4)**

Lösning. En normalvektor för planet ges av koefficienterna i ekvationen och vi får $\overline{n} = (1,-2,3)$. Vi kan projicera de tre standardbasvektorerna på planet genom att dra bort projektionen på normalen.

När vi projicerar på normalen får vi

$$\mathrm{Proj}_{\overline{n}}\,\overline{e}_1 = \frac{\overline{e}_1 \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n} = \frac{(1,0,0)^t \cdot (1,-2,3)^t}{(1,-2,3)^t \cdot (1,-2,3)^t}(1,-2,3)^t = \frac{1}{14}(1,-2,3)^t$$

$$\mathrm{Proj}_{\overline{n}}\,\overline{e}_2 = \frac{\overline{e}_2 \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n} = \frac{(0,1,0)^t \cdot (1,-2,3)^t}{(1,-2,3)^t \cdot (1,-2,3)^t}(1,-2,3)^t = \frac{-2}{14}(1,-2,3)^t$$

och

$$\mathrm{Proj}_{\overline{n}}\,\overline{e}_3 = \frac{\overline{e}_3 \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n} = \frac{(0,0,1)^t \cdot (1,-2,3)^t}{(1,-2,3)^t \cdot (1,-2,3)^t}(1,-2,3)^t = \frac{3}{14}(1,-2,3)^t$$

Om vi nu låter T vara projektionen på planet får vi att

$$T(\overline{e}_1) = \overline{e}_1 - \mathrm{Proj}_{\overline{n}}\,\overline{e}_1 = (1,0,0)^t - \frac{1}{14}(1,-2,3)^t = \frac{1}{14}(13,2,-3)^t$$

$$T(\overline{e}_2) = \overline{e}_2 - \mathrm{Proj}_{\overline{n}}\,\overline{e}_2 = (0,1,0)^t - \frac{-2}{14}(1,-2,3)^t = \frac{1}{14}(2,10,6)^t$$

och

$$T(\overline{e}_3) = \overline{e}_3 - \mathrm{Proj}_{\overline{n}}\,\overline{e}_3 = (0,0,1)^t - \frac{3}{14}(1,-2,3)^t = \frac{1}{14}(-3,6,5)^t.$$

Alltså ges matrisen för projektionen av

$$A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

□

Svar: Matrisen för projektionen ges av $A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

(4) Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 8 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 12 \\ -2 & 4 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm en bas för radrummet[1] till A med hjälp av Gausselimination. **(3)**

(b) Använd relationen mellan dimensionerna för radrum och nollrum[2] för att med hjälp av resultatet från 4a också bestämma dimensionen av nollrummet till A. **(1)**

Lösning. a) När vi utför radoperationer i Gausselimination ändras inte radrummet i matrisen. När vi väl har kommit till trappstegsform vet vi att de nollskilda raderna är linjärt oberoende och de utgör dämed en bas för radrummet.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 8 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 12 \\ -2 & 4 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} -r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -\frac{1}{4}r_2 \\ r_3 + \frac{1}{4}r_2 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Därmed utgör de två vektorerna $(1, -2, -1, -8)$ och $(0, 0, 1, 4)$ en bas för nollrummet till A.

b) Summan av dimensionerna av nollrum och radrum är lika med antalet kolonner, eftersom nollrummets dimension ges av antalet kolonner som saknar ledande ettor i trappstegsformen. Eftersom radrummet har dimension 2 får vi därmed att nollrummet dimension $4 - 2 = 2$.

□

Svar:

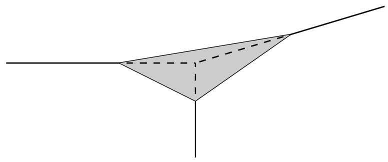
a) En bas för radrummet ges av vektorerna $(1, -2, -1, -8)$ och $(0, 0, 1, 4)$.

b) Nollrummets dimension är 2.

[1] Radrummet är det delrum som spänns upp av radvektorerna i matrisen.

[2] Nollrummet till A är lösningsmängden till ekvationen $Ax = 0$.

(5) En triangulär skärm ska sättas upp i ett hörn av ett rum där väggar och tak är vinkelräta mot varandra. Använd vektorprodukten[3] för att bestämma ett uttryck för skärmens area om skärmens tre hörnpunkter har avstånd a cm, b cm, respektive c cm från hörnet. **(4)**



FIGUR 3. Skärmens placering vid taket i ett av rummets hörn.

Lösning. Vi inför ett rätvinkligt koordinatsystem med rummets hörn som origo och de positiva axlarna utmed skärninge av väggar och tak. Därmed får vi att skärmens hörnpunkter får koordinater $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ och $(0, 0, c)$. För att beräkna skärmens area kan vi använda vektorprodukten eftersom längden av vektorn $\overline{u} \times \overline{v}$ är arean av den parallellogram som spänns upp av $\overline{u}$ och $\overline{v}$. Triangelns area blir hälften av parallellogrammens area.

Vi kan beräkna vektorer utefter triangelns sidor som

$$\overline{u} = (0, b, 0) - (a, 0, 0) = (-a, b, 0)$$

och

$$\overline{v} = (0, 0, c) - (a, 0, 0) = (-a, 0, b).$$

Vi beräknar kryssprodukten som

$$\begin{aligned} \overline{u} \times \overline{v} &= (-a, b, 0) \times (-a, 0, c) \\ &= (b \cdot c - 0 \cdot 0, 0 \cdot (-a) - (-a) \cdot c, (-a) \cdot 0 - b \cdot (-a)) \\ &= (bc, ac, ab). \end{aligned}$$

Det är längden av denna vektor som ger arean av parallellogrammen och vi får därmed att triangelns area är

$$\frac{1}{2}|\overline{u} \times \overline{v}| \,\mathrm{cm}^2 = |\frac{1}{2}|(bc, ac, ab)| \,\mathrm{cm}^2 = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2} \,\mathrm{cm}^2.$$

□

Svar: Skärmens area är $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2} \,\mathrm{cm}^2$.

[3]Vektorprodukten kallas också för kryssprodukt.

(6) (a) Förklara varför det i allmänhet är enkelt att bestämma egenvärdena för övertriangulära matriser. **(1)**

(b) Bestäm om möjligt en basbytesmatris P som diagonaliserar den övertriangulära matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3)

Lösning. a) I och med att determinanten för en övertriangulär matris ges av produkten av diagonalelementen kommer det karaktäristiska polynomet, $\det(A - \lambda I)$ att vara lika med $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ om A är en övertriangulär $n \times n$-matris. Egenvärdena som är nollställena till det karaktäristiska polynomet blir därmed lika med diagonalelementen, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

b) För att finna en basbytesmatris som diagonaliserar P behöver vi finna egenvektorerna. Vi har redan hittat egenvärdena som enligt del a) är lika med 1, 4 och 6.
För att finna egenvektorerna behöver vi lösa de homogena ekvationssystemen som svarar mot $(A - \lambda I)x = 0$ för dessa egenvärden.
Vi börjar med $\lambda = 1$ och får med Gausselimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{r} \frac{1}{2}r_1 \\ r_2 - \frac{3}{2}r_1 \\ r_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{r} r_1 \\ 2r_2 \\ r_3 - 10r_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket ger lösningen $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 0)$ eftersom $x_2 = x_3 = 0$ och vi kan låte $x_1 = t$ för en reell parameter t.
För $\lambda = 4$ får vi

$$\left(\begin{array}{rrr|c} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{r} -\frac{1}{3}r_1 \\ \frac{1}{5}r_2 \\ r_3 - \frac{2}{5}r_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och lösningen ges av $(x_1, x_2, x_3) = t(2, 3, 0)$ eftersom $x_3 = 0$ och vi kan låta $x_2 = 3t$ för en reell parameter t.
Till slut får vi för $\lambda = 6$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{r} -\frac{1}{5}r_1 \\ -\frac{1}{2}r_2 \\ r_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{r} r_1 + \frac{2}{5}r_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -\frac{8}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och lösningen ges av $(x_1, x_2, x_3) = t(16, 25, 10)$ eftersom vi kan låta $x_3 = 10t$ för en reell parameter t.
Vi kan få den sökta basbytesmatrisen genom att välja egenvektorerna som kolonner och kan därmed välja

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 0 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Det går att kontrollera att räkningarna stämmer genom att invertera P och beräkna produkten $P^{-1}AP$ och se att det blir en diagonalmatris med elementen 1, 4 och 6 på diagonalen.
Vi får

$$P^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 30 & -20 & 2 \\ 0 & 10 & -25 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 0 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

□

Svar:

b) Matrisen $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 0 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ är en basbytesmatris som diagonaliserar A.

Var god vänd!

DEL B

(7) När vi med den minsta-kvadratmetoden försöker hitta den ellips med ekvation

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

som bäst passar till punkterna $(2,2)$, $(-2,1)$, $(-1,-2)$ och $(2,-1)$ leds vi till ekvationen

$$\begin{pmatrix} 49 & 2 & 28 \\ 2 & 28 & 20 \\ 28 & 20 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{1}$$

som har lösningen $a = 0{,}10$, $b = -0{,}15$[4] och $c = 0{,}30$.

(a) Utför beräkningarna som leder fram till ekvationen (2). (Gausseliminationen av ekvationssystemet (2) behöver inte utföras.) **(3)**

(b) Förklara vad som menas med att lösningen $a = 0{,}10$, $b = -0{,}15$ och $c = 0{,}30$ är bäst i *minsta-kvadratmening*. **(1)**

Lösning. a) Vi ställer först upp de ekvationer som skulle vara uppfyllda om alla fyra punkter låg på ellipsen. Då skulle vi ha

$$\begin{cases} a\cdot 2^2 & + & b\cdot 2\cdot 2 & + & c\cdot 2^2 & = & 1, \\ a\cdot(-2)^2 & + & b\cdot(-2)\cdot 1 & + & c\cdot 1^2 & = & 1, \\ a\cdot(-1)^2 & + & b\cdot(-1)\cdot(-2) & + & c\cdot(-2)^2 & = & 1, \\ a\cdot 2^2 & + & b\cdot 2\cdot(-1) & + & c\cdot(-1)^2 & = & 1. \end{cases}$$

dvs uttryckt som matrisekvation

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normalekvationen ges nu av

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

dvs

$$\begin{pmatrix} 49 & 2 & 28 \\ 2 & 28 & 20 \\ 28 & 20 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{2}$$

[4]Pga av ett tryckfel stod den $b = 0{,}15$ i tentamenslydelsen, vilket påpekades under skrivningen.

b) Att lösningen är bäst i *minsta-kvadratmening* betyder att skillnaden mellan högerled och vänsterled i den ursprungliga ekvationen är vinkelrät mot det rum som spänns upp av kolonnerna. Därmed är längden av denna vektor så liten som möjligt, vilket betyder att summan av kvadraterna av avvikelserna är så liten som möjligt. (I det här fallet ligger de fyra punkterna på en ellips, så skillnaden mellan högerled och vänsterled är $(0, 0, 0, 0)$ när $a = 0{,}1$, $b = -0{,}15$ och $c = 0{,}3$ och summan av kvadraterna är därmed också 0.)

$\square$

(8) För positiva heltal n kan vi betrakta matrisen A_n som ges av

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{om } i-j=0, \\ -1, & \text{om } |i-j|=1, \\ 0, & \text{om } |i-j|>1. \end{cases}$$

Dessa matriser uppkommer naturligt då vi diskretiserar differentialekvationer. Vi har exempelvis att

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna determinanten av A_4 genom att utveckla den efter första raden. **(1)**

(b) Visa att vi för $n \geq 3$ kan beräkna $\det(A_n)$ uttryckt i $\det(A_{n-1})$ och $\det(A_{n-2})$ och använd detta uttryck för att med induktion visa att $\det(A_n) = n+1$, för alla positiva heltal n. **(3)**

Lösning. a) Vi utvecklar $\det(A_4)$ efter första raden och får då

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 4(2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) + 2((-1) \cdot 2 - 0 \cdot (-1)) - (2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) \\
&= 9 - 4 - 3 = 5.
\end{aligned}$$

b) Om vi utför räkningarna i del a) i det allmänna fallet kan vi se att

$$\begin{aligned}
\det(A_n) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}).
\end{aligned}$$

Vi kan nu använda induktion för att visa att $\det(A_n) = n+1$ för alla positiva heltal n. För $n = 1$ och $n = 2$ får vi att $\det(A_1) = 2 = 1+1$ och $\det(A_2) =$

$2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 3 = 2 + 1$. Så påståendet gäller för alla positiva $n \leq 2$. Antag nu att det gäller för alla positiva $n \leq k$, där $k \geq 2$. Då har vi enligt ekvationen ovan att

$$\begin{aligned} \det(A_{k+1}) &= 2\det(A_k) - \det(A_{k-1}) = 2 \cdot (k+1) - (k-1+1) \\ &= k + 2 = (k+1) + 1. \end{aligned}$$

Alltså gäller också påståendet för alla $n \leq k + 1$ och enligt indutionsprincipen följer nu att $\det(A_n) = n + 1$ för alla positiva heltal n.

$\square$

(9) Låt Q_a vara den kvadratiska formen som ges av

$$Q_a(x,y,z) = a(x^2+y^2+z^2) + 2xy + 2yz$$

där a är en reell parameter.

(a) Bestäm för vilka värden på parametern a som Q_a är positivt definit. **(3)**

(b) Låt a vara det minsta värdet för vilket Q_a är positivt semidefinit. Bestäm det största värde Q_a antar på enhetssfären $x^2+y^2+z^2=1$. **(1)**

Lösning. a) Den symmetriska matrisen svarar mot

$$Q_a(x,y,z) = a(x^2+y^2+z^2) + 2xy + 2yz$$

är

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

För att se på om Q_a är positivt definit behöver vi se om alla egenvärden är positiva. Vi får egenvärdena som lösningarna till den karaktäristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a-\lambda)\det\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a-\lambda)((a-\lambda)^2 - 1) - 1) = (a-\lambda)((a-\lambda)^2 - 2) \end{aligned}$$

Därmed har vi egenvärdena $\lambda = a$, $\lambda = a + \sqrt{2}$ och $\lambda = a - \sqrt{2}$. Det minsta egenvärdet är $a - \sqrt{2}$ och för att detta ska vara positivt krävs att $a > \sqrt{2}$.

b) Om $a < \sqrt{2}$ finns ett negativt egenvärde, så $a = \sqrt{2}$ är det minsta värde på a som gör att a är positivt semidefinit. Vi har då att det största egenvärdet är $\lambda = 2\sqrt{2}$ och det minsta $\lambda = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$. Därmed gäller att $0 \le Q_a(x,y,z) \le 2\sqrt{2}$ för alla x, y, z med $x^2+y^2+z^2 = 1$. Om vi har ordnat egenvärdena i storleksordning $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$ får vi efter diagonalisering att

$$Q_a(x,y,z) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_1 y'^2 + \lambda_3 z'^2 \le \lambda_3(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \lambda_3$$

för punkter på enhetssfären.

Det största värdet uppnås när (x, y, z) är en egenvektor med egenvärde $2\sqrt{2}$.

□

Svar:

a) Q_a är positivt definit om $a > \sqrt{2}$.

b) Det största värdet $Q_{\sqrt{2}}(x,y,z)$ antar på enhetssfären är $2\sqrt{2}$.

(10) För varje naturligt tal $n \geq 2$ kan vi se på det delrum V av $\mathbb{R}^n$ som ges av lösningarna till ekvationen $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

(a) Visa att vektorerna $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_2 - e_3, \ldots, f_{n-1} = e_{n-1} - e_n$ utgör en bas för V om $e_1, e_2, \ldots, e_n$ är standardbasvektorerna för $\mathbb{R}^n$. **(2)**

(b) Använd Gram-Schmidts metod för att utifrån den givna basen för V skapa en ortogonal bas för V med avseende på den euklidiska inre produkten på $\mathbb{R}^n$. **(2)**

Lösning. a) För att bestämma dimensionen för V kan vi se att matrisen som beskriver ekvationssystemet för V består av en enda nollskild rad. Detta betyder att radrummet har dimension 1 och eftersom antalet kolonner är n kommer nollrummet, dvs V, att ha dimension $n-1$.

Alla de $n-1$ vektorerna $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ ligger i V eftersom de har en koordinat som är 1, en som är -1 och resten är noll.

Därmed återstår bara att visa att $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ är linjärt oberoende. Antag att $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_{n-1} f_{n-1} = 0$. Vi får då att

$$\begin{aligned} 0 &= a_1(e_1 - e_2) + a_2(e_2 - e_3) + \cdots + a_{n-1}(e_{n-1} - e_n) \\ &= a_1 e_1 + (a_2 - a_1)e_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})e_{n-1} - a_{n-1}e_n. \end{aligned}$$

Eftersom $e_1, e_2, \ldots, e_n$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$ innebär detta att

$$a_1 = a_2 - a_1 = \cdots = a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-1} = 0.$$

Den första ekvationen innebär att $a_1 = 0$ och när vi sätter in detta i den andra får vi $a_2 = 0$. Till slut får vi att $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ och vi drar slutsatsen att $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ är linjärt oberoende och därmed bildar en bas för V.

b) Vi ska bygga upp en ortogonal bas för V som består av vektorer $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$. Det första steget är att låta $g_1 = f_1 = e_1 - e_2$. Vi bildar sedan nästa vektor genom att ta f_2 oh dra bort projektionen av f_2 på e_1 och vi får då

$$\begin{aligned} g_2 &= f_2 - \mathrm{Proj}_{g_1} f_2 = e_2 - e_3 - \tfrac{(e_2-e_3)\cdot(e_1-e_2)}{(e_1-e_2)\cdot(e_1-e_2)}(e_1 - e_2) \\ &= e_2 - e_3 - \tfrac{-1}{2}(e_1 - e_2) = \tfrac{1}{2}e_1 + \tfrac{1}{2}e_2 - e_3. \end{aligned}$$

Vi kan gå vidare ett steg och får då eftersom $f_3 = e_3 - e_4$ att $f_3 \cdot g_1 = 0$ och $f_3 \cdot g_2 = -1$. Vidare är $g_2 \cdot g_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$ vilket ger

$$\begin{aligned} g_3 &= f_3 - \mathrm{Proj}_{g_1} f_3 - \mathrm{Proj}_{g_2} f_3 = f_3 - \tfrac{-1}{3/2} g_2 \\ &= e_3 - e_4 + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}e_1 + \tfrac{1}{2}e_2 - e_3) \\ &= \tfrac{1}{3}e_1 + \tfrac{1}{3}e_2 + \tfrac{1}{3}e_3 - e_4 \end{aligned}$$

Vi kan nu ana ett mönster och kan prova att visa genom induktion att

$$g_i = \frac{1}{i}e_1 + \frac{1}{i}e_2 + \cdots + \frac{1}{i}e_i - e_{i+1}, \quad \text{för } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Vi har redan sett att det stämmer för $i = 1, 2, 3$. Vi antar nu per induktion att det stämmer för $i = k$ och ska visa att det också stämmer för $i = k+1$, så länge $k + 1 \leq n$.

Vi får att $g_k \cdot g_k = i \cdot \frac{1}{i^2} + 1 = \frac{i+1}{i}$. I och med att vi då har $g_j \cdot f_{k+1} = 0$ för $j < k$ får vi att

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= f_{k+1} - \mathrm{Proj}_{g_1} f_{k+1} - \mathrm{Proj}_{g_2} f_{k+1} - \cdots - \mathrm{Proj}_{g_k} f_{k+1} \\ &= f_{k+1} - \tfrac{g_k \cdot f_{k+1}}{g_k \cdot g_k} g_k = e_{k+1} - e_{k+2} - \tfrac{-1}{(1+k)/k} g_k \\ &= \tfrac{1}{1+k} e_1 + \tfrac{1}{1+k} e_2 + \cdots + \tfrac{1}{1+k} e_{k+1} + (1 - \tfrac{k}{k+1}) e_{k+1} - e_{k+2} \\ &= \tfrac{1}{1+k} e_1 + \tfrac{1}{1+k} e_2 + \cdots + \tfrac{1}{1+k} e_{k+1} - e_{k+2}. \end{aligned}$$

Därmed stämmer vår formel för g_i för alla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ och alla $n \geq 2$ enligt induktionsprincipen.

$\square$

Svar:

b) Den ortogonala bas $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}\}$ som fås via Gram-Schmidt metod ges av $g_i = \frac{1}{i} e_1 + \frac{1}{i} e_2 + \cdots + \frac{1}{i} e_i - e_{i+1}$ för $i = 1, 2, \ldots, n-1$.