KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Lördagen den 5 juni, 2010

Skrivtid: 09.00-14.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av tio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De sex första uppgifterna utgör del A och resterande uppgifter del B. De tre första uppgifterna kan ersättas med resultat från den löpande examinationen enligt beskrivningen i Kurs-PM. [1] Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas.

Betygsgränserna ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	31	26	21	18	16	14
varav från del B	11	7	3	-	-	-

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl! För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och att det finns utförligt med förklarande text till beräkningarna. Lösningar som saknar förklarande text bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

[1] Observera att endast löpande examination från period 2 och period 3 kan tillgodoräknas vid denna tentamen.

DEL A

(1) Betrakta det komplexa talet $w = 3 - i$.

(a) Skriv potenserna w^n på rektangulär form, för $n = -2, -1, 0, 1, 2$. **(3)**

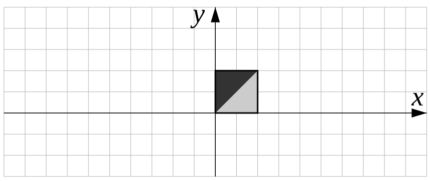
(b) Bestäm ett andragradspolynom med reella koefficienter som har w som ett av sina nollställen. **(1)**

(2) Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ har standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna potenserna A^n, för $n = -2, -1, 0, 1, 2$. **(3)**

(b) Åskådliggör verkan av den linjära avbildningen T på det kvadratiska området Ω som ges av figuren nedan. [2] **(1)**



FIGUR 1. Området Ω

(3) (a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet som ges av

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ -2 & 2 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

med hjälp av Gausselimination. **(3)**

(b) Ange ett högerled för vilket motsvarande ekvationssystem saknar lösning. **(1)**

(4) Fibonaccitalen har använts för att modellera vissa typer av tillväxtsituationer. De definieras av att $F_0 = F_1 = 1$ och $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, för $n \geq 2$. Den relativa tillväxten ges av kvoterna $\alpha_n = F_{n+1}/F_n$, för $n \geq 0$. Med hjälp av rekursionen ovan får vi att $\alpha_n = (F_n + F_{n-1})/F_n = 1 + 1/\alpha_{n-1}$, för $n \geq 1$. Använd detta för att med hjälp av induktion visa att den relativa tillväxten uppfyller

$$\frac{3}{2} \leq \alpha_n \leq 2$$

för alla heltal $n \geq 1$.

[2] Använd egenskaperna hos linjära avbildningar, exempelvis att linjestycken avbildas på linjestycken.

(5) (a) Förklara hur man kan använda projektion för att bestämma det kortaste avståndet från en punkt till ett plan och illustrera metoden genom att bestämma avståndet från planet som innehåller punkterna $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 3, 3)$ och $C = (-1, 5, 2)$ till punkten $D = (3, 1, 0)$. **(3)**

(b) Förklara varför svaret också kan fås med hjälp av formeln

$$d = \frac{|(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}|}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}$$

genom att tolka täljare och nämnare geometriskt. **(1)**

(6) (a) Bestäm om möjligt en basbytesmatris P som diagonaliserar den antidiagonala matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3)

(b) Förklara varför egenvektorerna till A också är egenvektorer till A^2. (Det omvända är dock inte nödvändigtvis är sant.) **(1)**

Var god vänd!

DEL B

(7) Vid en mätning har man erhållit fem punkter $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,2)$, $P_3 = (2,3)$, $P_4 = (3,5)$ och $P_5 = (4,6)$. Den teoretiska modellen säger att det skulle finnas ett linjärt samband, $y = ax + b$, för några parametrar a och b.

(a) Använd minsta-kvadratmetoden för att bestämma de värden på parametrarna som bäst stämmer med mätningarna. **(3)**

(b) Vilka av de fem punkterna har störst, respektive minst, avvikelse mot den framtagna minsta-kvadratlösningen? **(1)**

(8) Låt $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ vara en ortonormal bas för $\mathbb{R}^n$ med avseende på den Euklidiska inre produkten. Betrakta dessa vektorer som $n \times 1$-matriser och bilda $n \times n$-matrisen

$$A = a_1\bar{v}_1\bar{v}_1^t + a_2\bar{v}_2\bar{v}_2^t + \cdots + a_n\bar{v}_n\bar{v}_n^t,$$

där $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är reella tal.

(a) Visa att A är en symmetrisk $n \times n$-matris. **(1)**

(b) Visa att $\bar{v}_i$ är en egenvektor till A med egenvärde a_i, för $i = 1, 2, \ldots, n$. **(1)**

(c) Använd detta för att bestämma en symmetrisk matris med egenvektorerna $(1, 0, -1)$, $(1, 1, 1)$ och $(1, -2, 1)$ där motsvarande egenvärden är 2, 3 respektive 6. **(2)**

(9) Låt $P_3 = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 | a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ vara vektorrummet av reella polynom av grad högst tre. Definiera den linjära avbildningen $T : P_3 \longrightarrow P_3$ genom

$$T(p(x)) = D^2((x^2 + 1)p(x)) - 12p(x)$$

där $p(x) \in P_3$ och där $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ avser derivering två gånger.

(a) Bestäm något polynom $p(x)$ i P_3 sådant att $T(p(x)) = 14x^3$. **(1)**

(b) Bestäm en bas i P_3 för vilken avbildningens matris är diagonal. **(3)**

(10) Låt (x_1, x_2, x_3) vara koordinater för $\mathbb{R}^3$ med avseende på standardbasen $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som bestäms av

$$T(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \quad T(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \quad T(\bar{e}_3) = \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3.$$

Låt V vara delrummet av $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(a) Visa att det för varje vektor $\bar{v}$ i V gäller att bildvektorn $T(\bar{v})$ ligger i V. **(1)**

(b) Låt $S : V \to V$ vara den linjära avbildning som man får från T genom att bara använda T på vektorer i V. Bestäm matrisen för avbildningen S med avseende på någon bas för V och bestäm egenvärdena för denna matris. **(2)**

(c) Förklara varför egenvärdena som bestämdes i 10b också är egenvärden till standardmatrisen för T. **(1)**