KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Måndagen den 15 mars, 2010

Skrivtid: 08.00-13.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av tio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De sex första uppgifterna utgör del A och resterande uppgifter del B. De tre första uppgifterna kan ersättas med resultat från den löpande examinationen enligt beskrivningen i Kurs-PM.[1] Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas.

Betygsgränserna ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	31	26	21	18	16	14
varav från del B	11	7	3	-	-	-

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl! För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och att det finns utförligt med förklarande text till beräkningarna. Lösningar som saknar förklarande text bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

[1] Observera att endast löpande examination från period 3 kan tillgodoräknas vid denna tentamen.

DEL A

(1) (a) Förklara hur man kan beräkna kvadratrötterna ur ett komplext tal w genom att ansätta $z = a + ib$ och identifiera real- och imaginärdelar i ekvationen $z^2 = w$. **(1)**

(b) Använd detta för att bestämma rötterna till ekvationen $z^2 - (4 + 6i)z - 2 + 16i = 0$ skrivna på rektangulär form. **(3)**

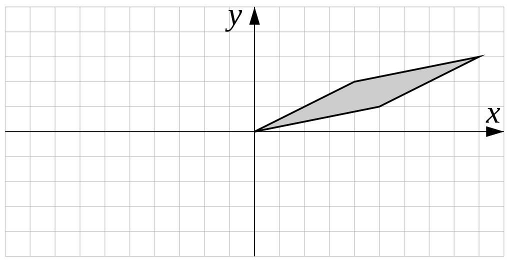
(2) Ett område Ω i planet $\mathbb{R}^2$ avbildas genom den linjära avbildningen T med standardmatris

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

på parallellogrammen med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(5, 1)$, $(4, 2)$ och $(9, 3)$.

(a) Bestäm området Ω. (Använd egenskaperna hos linjära avbildningar, exempelvis att linjestycken avbildas på linjestycken.) **(3)**

(b) Jämför arean av Ω med arean av bilden $T(\Omega)$. **(1)**



FIGUR 1. Bilden, $T(\Omega)$, av området Ω under avbildningen T.

(3) Den vinkelräta projektionen på planet som ges av ekvationen $x - 2y + 3z = 0$ är en linjär avbildning och kan därmed beskrivas med hjälp av en matris. Bestäm standardmatrisen för denna projektion genom att se på hur den verkar på standardbasvektorerna. **(4)**

(4) Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 8 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 12 \\ -2 & 4 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

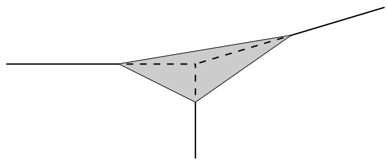
(a) Bestäm en bas för radrummet[2] till A med hjälp av Gausselimination. **(3)**

(b) Använd relationen mellan dimensionerna för radrum och nollrum[3] för att med hjälp av resultatet från 4a också bestämma dimensionen av nollrummet till A. **(1)**

[2] Radrummet är det delrum som spänns upp av radvektorerna i matrisen.

[3] Nollrummet till A är lösningsmängden till ekvationen $Ax = 0$.

(5) En triangulär skärm ska sättas upp i ett hörn av ett rum där väggar och tak är vinkelräta mot varandra. Använd vektorprodukten[4] för att bestämma ett uttryck för skärmens area om skärmens tre hörnpunkter har avstånd a cm, b cm, respektive c cm från hörnet. **(4)**



FIGUR 2. Skärmens placering vid taket i ett av rummets hörn.

(6) (a) Förklara varför det i allmänhet är enkelt att bestämma egenvärdena för övertriangulära matriser. **(1)**

(b) Bestäm om möjligt en basbytesmatris P som diagonaliserar den övertriangulära matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3)

DEL B

(7) När vi med den minsta-kvadratmetoden försöker hitta den ellips med ekvation

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

som bäst passar till punkterna $(2, 2)$, $(-2, 1)$, $(-1, -2)$ och $(2, -1)$ leds vi till ekvationen

$$\begin{pmatrix} 49 & 2 & 28 \\ 2 & 28 & 20 \\ 28 & 20 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

som har lösningen $a = 0{,}10$, $b = 0{,}15$ och $c = 0{,}30$.

(a) Utför beräkningarna som leder fram till ekvationen (1). (Gausseliminationen av ekvationssystemet (1) behöver inte utföras.) **(3)**

(b) Förklara vad som menas med att lösningen $a = 0{,}10$, $b = 0{,}15$ och $c = 0{,}30$ är bäst i *minsta-kvadratmening*. **(1)**

Var god vänd!

[4]Vektorprodukten kallas också för kryssprodukt.

(8) För positiva heltal n kan vi betrakta matrisen A_n som ges av

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{om } i-j=0, \\ -1, & \text{om } |i-j|=1, \\ 0, & \text{om } |i-j|>1. \end{cases}$$

Dessa matriser uppkommer naturligt då vi diskretiserar differentialekvationer. Vi har exempelvis att

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna determinanten av A_4 genom att utveckla den efter första raden. **(1)**

(b) Visa att vi för $n \geq 3$ kan beräkna $\det(A_n)$ uttryckt i $\det(A_{n-1})$ och $\det(A_{n-2})$ och använd detta uttryck för att med induktion visa att $\det(A_n) = n+1$, för alla positiva heltal n. **(3)**

(9) Låt Q_a vara den kvadratiska formen som ges av

$$Q_a(x,y,z) = a(x^2+y^2+z^2) + 2xy + 2yz$$

där a är en reell parameter.

(a) Bestäm för vilka värden på parametern a som Q_a är positivt definit. **(3)**

(b) Låt a vara det minsta värdet för vilket Q_a är positivt semidefinit. Bestäm det största värde Q_a antar på enhetssfären $x^2+y^2+z^2=1$. **(1)**

(10) För varje naturligt tal $n \geq 2$ kan vi se på det delrum V av $\mathbb{R}^n$ som ges av lösningarna till ekvationen $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

(a) Visa att vektorerna $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_2 - e_3, \ldots, f_{n-1} = e_{n-1} - e_n$ utgör en bas för V om $e_1, e_2, \ldots, e_n$ är standardbasvektorerna för $\mathbb{R}^n$. **(2)**

(b) Använd Gram-Schmidts metod för att utifrån den givna basen för V skapa en ortogonal bas för V med avseende på den euklidiska inre produkten på $\mathbb{R}^n$. **(2)**