KTH Teknikvetenskap

**SF1624 Algebra och geometri**
**Tentamen**
**Måndagen den 11 januari, 2010**

Skrivtid: 14.00-19.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av tio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De sex första uppgifterna utgör del A och resterande uppgifter del B. De tre första uppgifterna kan ersättas med resultat från den löpande examinationen enligt beskrivingen i Kurs-PM för respektive kursomgång.[1] Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas.

Betygsgränserna ges av

| Betyg | A | B | C | D | E | Fx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Total poäng | 31 | 26 | 21 | 18 | 16 | 14 |
| varav från del B | 11 | 7 | 3 | - | - | - |

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl! För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och att det finns utförligt med förklarande text till beräkningarna. Lösningar som saknar förklarande text bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

[1] Observera att endast löpande examination från period 1 kan tillgodoräknas vid denna tentamen.

## DEL A

(1) (a) Visa hur man kan använda polär form av komplexa tal för att beräkna potenser genom att beräkna $(1-i\sqrt{3})^7$ och skriva svaret på rektangulär form. **(3)**

(b) Ange en polynomekvation med reella koefficienter som har $1-i\sqrt{3}$ som en rot. **(1)**

(2) (a) Använd Gauss-Jordans metod för att bestämma lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 9x_4 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -3. \end{cases}$$

**(3)**

(b) Bestäm villkoret på $a$, $b$ och $c$ för att det ska finnas lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = a, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 9x_4 = b, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = c. \end{cases}$$

**(1)**

(3) (a) Ge exempel, med motivering, på två linjer i rummet som inte skär varandra men som heller inte är parallella. **(1)**

(b) Visa hur man kan finna en ekvation för det plan som innehåller två givna parallella linjer genom at utföra detta med linjerna $(x, y, z) = (3, -5, 1) + t(2, -2, 4)$ och $(x, y, z) = (1, 3, 1) + t(-1, 1, -2)$, där $t$ är en reell parameter. **(3)**

(4) (a) Förklara varför determinanten av transponatet av en matris är lika med determinanten av matrisen. **(1)**

(b) Använd detta till att visa att determinanten av en ortogonal matris måste vara $1$ eller $-1$ . **(2)**

(c) Ge exempel på en ortogonal $2\times 2$-matris med determinant $1$ och en med determinant $-1$. **(1)**

(5) Låt $\overline{v}$ vara en given vektor i $\mathbb{R}^3$ och definiera med vektorprodukten $T(\overline{u}) = \overline{u}\times\overline{v}$, för alla $\overline{u}$ i $\mathbb{R}^3$.

(a) Visa att $T$ är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$. **(1)**

(b) Bestäm standardmatrisen för $T$ om den givna vektorn är $\overline{v} = (a, b, c)^t$. **(3)**

(6) (a) Förklara vad som menas med att en kvadratisk form är positivt definit. **(1)**

(b) Avgör om den kvadratiska formen

$$Q(x, y) = 9x^2 + 20xy + 11y^2$$

är positivt definit. **(3)**

## DEL B

(7) Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

har en egenvektor som är $(1, -1, 0)^t$. Använd detta för att diagonalisera $A$. **(4)**

(8) Visa med hjälp av vektorkalkyl att de tre linjerna mellan hörnen i en triangel $ABC$ och mittpunkterna på motstående sidor skär varandra i punkten med ortsvektor

$$\frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OC},$$

där $O$ är koordinatsystemets origo. Illustrera med belysande figurer. **(4)**

(9) På rummet av kontinuerliga funktioner på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ inför vi skalärprodukten

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Använd Gram-Schmidts metod för att bestämma en ortogonal bas för underrummet[2] av polynomfunktioner av grad högst två. **(4)**

(10) Rummet av $n \times n$-matriser bildar ett vektorrum. Visa att mängden av matriser $B$ som *kommuterar* med en given matris $A$, dvs uppfyller $AB = BA$, bildar ett underrum och bestäm en bas för detta underrum i fallet då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

**(4)**

[2] Underrum kallas också *delrum*