KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Tisdagen den 15 december, 2009

Skrivtid: 14.00-19.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av tio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De sex första uppgifterna utgör del A och resterande uppgifter del B. De tre första uppgifterna kan ersättas med resultat från den löpande examinationen enligt beskrivingen i Kurs-PM.[1] Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas.

Betygsgränserna ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	31	26	21	18	16	14
varav från del B	11	7	3	-	-	-

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl! För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och att det finns utförligt med förklarande text till beräkningarna. Lösningar som saknar förklarande text bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

[1] Observera att endast löpande examination från period 2 kan tillgodoräknas vid denna tentamen.

DEL A

(1) (a) Bestäm de komplexa koefficienterna a, b och c så att polynomet

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$$

har nollställena $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 - i$ och $z_3 = -i$. **(3)**

(b) Går det att ändra på ett av nollställena så att alla koefficienter blir reella? **(1)**

(2) *Enhetskuben* i $\mathbb{R}^3$ är den kub med volym ett som spänns upp av de tre standardbasvektorerna. Den linjära avbildningen T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Förklara varför T avbildar ett linjestycke i $\mathbb{R}^3$ på ett linjestycke i $\mathbb{R}^2$. **(1)**

(b) Rita upp bilden av enhetskuben i $\mathbb{R}^3$ under avbildningen T. **(3)**

(3) (a) Förklara varför man kan beräkna inversmatrisen till en kvadratisk matris A genom att utföra Gauss-Jordanelimination på totalmatrisen $(A|I)$, där I är identitetsmatrisen av samma storlek som A. **(1)**

(b) Visa hur detta går till i praktiken genom att beräkna inversen, A^{-1}, till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

och kontrollera att $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. **(3)**

(4) Använd induktion för att visa att

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & n+1 \end{pmatrix}$$

för alla positiva heltal n. **(4)**

(5) (a) Förklara vad det innebär att en kvadratisk matris går att diagonalisera. **(1)**

(b) Avgör om matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

går att diagonalisera. **(3)**

(6) Beskriv hur man kan bestämma ekvationen för det plan i rummet som innehåller en given linje och en given punkt utanför linjen. Ge ett belysande exempel genom att utföra detta med punkten $(1, 1, 0)$ och linjen $(x, y, z) = (3, 0, -1) + t(0, 2, 1)$, där t är en reell parameter. **(4)**

DEL B

(7) Bestäm basbyten i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ som gör att den linjära avbildningen T, som har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

med avseende på standardbaserna, får matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

med avseende på de nya baserna. Ange båda basbytesmatriserna och var noggrann med att ange åt vilket håll basbytena går. **(4)**

(8) Egenvektorer som hör till olika egenvärden till en symmetrisk matris är automatiskt ortogonala mot varandra. Använd detta för att finna en ortonormal bas av egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 6 & -3 \\ 15 & 4 & 6 & -3 \\ 6 & 6 & -2 & 12 \\ -3 & -3 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

där $\overline{u}_1 = (1,1,1,1)^t$, $\overline{u}_2 = (0,0,1,2)^t$, $\overline{u}_3 = (1,0,-2,1)^t$ och $\overline{u}_4 = (-1,1,0,0)^t$ är fyra linjärt oberoende egenvektorer till A. **(4)**

(9) En *ellips* i planet med centrum i origo kan ses som en nivåkurva till en kvadratisk form, dvs lösningarna till ekvationen $Q(x,y) = k$ för någon kvadratisk form $Q(x,y)$ och någon konstant k. Om vi efter ett ortogonalt koordinatbyte skriver ellipsens ekvation på den *kanoniska* formen

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

där $a \geq b > 0$, kommer den att som bredast vara $2a$ i *storaxelriktningen* och som smalast $2b$ i *lillaxelriktningen*.

(a) Bestäm ekvationen för den ellips som har $a = 5\sqrt{2}$ och $b = 5$ och som har storaxelrikningen $(1,7)$. **(3)**

(b) Avgör om punkten $(0,7)$ ligger utanför eller innanför denna ellips. **(1)**

(10) I tillämpningar inom statistik förekommer *stokastiska matriser*. Det är kvadratiska matriser där elementen i matrisen är sannolikheter och därför ligger i intervallet $[0,1]$ och där summan av elementen i varje kolonn är lika med 1.

(a) Visa att produkten av två stokastiska matriser av samma storlek också är en stokastisk matris. **(2)**

(b) Visa att varje stokastisk matris har ett egenvärde som är 1. **(2)**