KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Fredagen den 23 oktober, 2009

Skrivtid: 14.00-19.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av tio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De sex första uppgifterna utgör del A och resterande uppgifter del B. De tre första uppgifterna kan ersättas med resultat från den löpande examinationen enligt beskrivingen i Kurs-PM för respektive kursomgång. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	31	26	21	18	16	14
varav från del B	11	7	3	-	-	-

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl! För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och att det finns utförligt med förklarande text till beräkningarna. Lösningar som saknar förklarande text bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

(1) (a) Bestäm de övriga rötterna till ekvationen

$$z^3 - 11z^2 + 43z - 65 = 0$$

när det är känt att en av rötterna är $3 - 2i$. **(3)**

(b) Förklara varför de komplexa rötterna till en tredjegradsekvation med reella koefficienter förekommer i konjugerade par. **(1)**

(2) (a) Avgör för vilka värden på parametern t som de tre vektorerna

$$(1-t, 0, 1, 1), \quad (2, 6-t, 0, 2) \quad \text{och} \quad (1, 4, 1, 3)$$

är linjärt oberoende i $\mathbf{R}^4$. **(3)**

(b) Förklara vad som menas med att tre vektorer i $\mathbf{R}^n$ är linjärt oberoende. **(1)**

(3) Använd linjen $(x, y, z) = (2, 1, -1) + t(0, 1, -2)$ och punkten $(0, 1, 1)$ för att visa hur man med hjälp av projektion finner den punkt på en given linje som ligger närmast en given punkt. **(4)**

(4) Vid lösningen av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 1, \\ & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -5, \end{cases}$$

kommer man genom Gausselimination fram till matrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right).$$

(a) Skriv upp den matris som hör till det givna systemet och utför de radoperationer som krävs för att få den på trappform. **(1)**

(b) Ange lösningsmängden till ekvationssystemet. **(2)**

(c) Tillhör punkten $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 12, 4, -9)$ lösningsmängden? **(1)**

(5) (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3)

(b) Förklara varför alla egenvärden till en kvadratisk matris, A, måste uppfylla den *karaktäristiska ekvationen*[1], $\det(A - \lambda I) = 0$. **(1)**

(6) (a) Förklara vad som menas med att en avbildning T från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^2$ är linjär. **(1)**

(b) Bestäm matrisen med avseende på standardbasen för den linjära avbildning T från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^2$ som uppfyller

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(3)

Var god vänd!

[1] också kallad *sekularekvationen* och skrivs ibland $\det(\lambda I - A) = 0$

DEL B

(7) Vi har två baser i $\mathbf{R}^3$ givna av

$$F = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

och känner till att en basbytesmatris mellan baserna ges av

$$T = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(a) Det är ofta svårt att komma ihåg åt vilket håll basbytet går. Red ut detta genom att använda matrisen ovan för att bestämma koordinaterna relativt basen F för den vektor som har koordinaterna (a, b, c) relativt basen G. **(2)**

(b) Bestäm matrisen för det omvända basbytet. **(2)**

(8) (a) Förklara varför egenvektorer som hör till olika egenvärden till en symmetrisk matris måste vara ortogonala mot varandra. **(2)**

(b) Bestäm en symmetrisk matris med egenvärdena -1 och 4 och där $(4, -3)$ en egenvektor till det första egenvärdet. **(2)**

(9) Enligt en modell för en elektrisk krets uppfyller strömmen $i(t)$ uppmätt vid jämna tidsintervall en rekursionsekvation

$$i_{n+2} = a i_{n+1} + b i_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

där a och b är konstanter. Vid en mätning har man mätt upp strömmens värde vid ett antal tidpunkter och har därmed mätdata i en vektor $(i_1, i_2, \ldots, i_5)$. Beskriv hur man kan använda minsta-kvadratmetoden för att finna de värden på konstanterna a och b som bäst stämmer överens med mätningarna. Illustrera metoden genom att utföra den i fallet då vi har fem mätvärden $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (1, 2, 2, 1, 0)$ mA. **(4)**

(10) Spåret av en kvadratisk matris A ges av summan av diagonalelementen och betecknas med $\operatorname{tr} A$. Låt $\{a_n\}$ vara talföljden som definieras genom

$$a_n = \operatorname{tr} \begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}^n, \qquad \text{för alla heltal } n \geq 1.$$

Visa att följden uppfyller den linjära rekursionsekvationen

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n$$

för alla heltal $n \geq 1$, exempelvis genom att använda att $A^2 = 4A + 5I$. **(4)**