KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Modelltentamen

Skrivtid: 8.00-13.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av tio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De sex första uppgifterna utgör del A och resterande uppgifter del B. De tre första uppgifterna kan ersättas med resultat från den löpande examinationen enligt beskrivingen i Kurs-PM för respektive kursomgång. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	31	26	21	18	16	14
varav från del B	11	7	3	-	-	-

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl!

Var god vänd!

DEL A

(1) a) Definiera begreppen *rektangulär form* och *polär form* för komplexa tal och ange sambandet mellan dem. **(2)**

b) Ange rötterna till ekvationen $z^2 + 2z + 4 = 0$ på polär form. **(2)**

(2) a) Använd Gausselimination för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 32, \\ 3x - 2y = -11, \\ 2x + 12y - 20z = 171. \end{cases}$$

(3)

b) På vilket sätt ändrar sig lösningen om det sista talet i högerledet ändras från 171 till 172? **(1)**

(3) (a) Avgör vilka tre av vektorerna $(1, 2, 1)$, $(3, 4, 2)$, $(3, 2, 1)$ och $(0, 1, 2)$ som är egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 33 & -30 & 15 \\ 30 & -40 & 26 \\ 15 & -26 & 25 \end{pmatrix}$$

och bestäm motsvarande egenvärden. **(2)**

(b) Visa att matrisen A är diagonaliserbar genom att finna en matris P och en diagonalmatris D så att $P^{-1}AP = D$. **(2)**

(4) (a) Använd vektorprodukten för att finna en linje som är vinkelrät mot det plan som innehåller de tre punkterna $A = (0, 1, 2)$, $B = (0, 1, 1)$ och $C = (-1, 0, 3)$. **(2)**

(b) Bestäm avståndet från punkten $P = (5, 1, 2)$ till samma plan genom projektion på en linje som är vinkelrät mot planet. **(2)**

(5) (a) Förklara vad som menas med att tre vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. **(2)**

(b) Bestäm för vilka värden för a som de tre vektorerna $(1, a, 2)$, $(2, 1, 4)$ och $(a, 4, -1)$ är linjärt oberoende. **(2)**

(6) Vid en mätning har följande mätvärden erhållits:

t (ms)	1,0	2,0	3,0
$x(t)$ (mm)	2,1	2,4	2,8

Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden de konstanter a och b som bäst stämmer överens med mätningarna om modellen för förloppet säger att $x(t) = at + b$. (Tänk på att ange a och b med rätt enheter.) **(4)**

DEL B

(7) De fyra punkterna $(1,3,2)$, $(5,3,2)$, $(4,2,4)$ och $(4,4,1)$ ligger alla i samma plan.

(a) Förklara varför det inte finns någon linjär avbildning som skickar dessa fyra punkter på $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ och $(1,1,1)$. **(2)**

(b) Beskriv hur man kan finna matrisen för en linjär avbildning som sänder de tre första punkterna till $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$. **(2)**

(8) I basen som ges av de tre vektorerna $(1,0,-1)$, $(1,-1,0)$ och $(1,1,1)$ har den linjära avbildningen för en spegling i planet $x+y+z=0$ den enkla formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ange matrisen för samma linjära avbildning med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^3$, dvs för basen $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. **(4)**

(9) Vi kan identifiera $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$ genom att $x+iy$ svarar mot (x,y). Visa att multiplikation med det komplexa talet $a+bi$ då motsvarar en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ och bestäm matrisen för den avbildningen med avseende på standardbasen. **(4)**

(10) Betrakta matrisekvationen

$$X^2+X+I=0$$

(a) Ge exempel på en 2×2-matris X som uppfyller ekvationen. **(1)**

(b) Visa att alla matriser[1] som uppfyller ekvationen har determinant 1. **(3)**

[1] med reella element