KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Bedömningskriterier till tentamen
Tisdagen den 15 december, 2009

Allmänt gäller följande:

- Om lösningen helt saknar förklarande text till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med "FTS" (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med "FLFT' (För lite förklarande text).'
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.

DEL A

(1) (a) Bestäm de komplexa koefficienterna a, b och c så att polynomet

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$$

har nollställena $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 - i$ och $z_3 = -i$. **(3)**

(b) Går det att ändra på ett av nollställena så att alla koefficienter blir reella? **(1)**

Bedömning:

a)
- Korrekt hänvisning till faktorsatsen, **1 poäng**.
- Korrekt multiplikation av två faktorer, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd multiplikation och slutsats om koefficienterna, **1 poäng**.

b)
- Korrekt motivering till varför det inte går att få alla koefficienter reella genom att ändra på ett nollställe, **1 poäng**.

---

(2) *Enhetskuben* i $\mathbb{R}^3$ är den kub med volym ett som spänns upp av de tre standardbasvektorerna. Den linjära avbildningen T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Förklara varför T avbildar ett linjestycke i $\mathbb{R}^3$ på ett linjestycke i $\mathbb{R}^2$. **(1)**

(b) Rita upp bilden av enhetskuben i $\mathbb{R}^3$ under avbildningen T. **(3)**

Bedömning:

a)
- Korrekt förklaring till varför linjära avbildningar avbildar linjestycken på linjestycken, men hänvisning till linjäritetsegenskapen, **1 poäng**.

b)
- Korrekt princip för att finna bilden av en punkt genom matrismultiplikatoin, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av bilderna av hörnen, **1 poäng** .
- Korrekt uppritad figur, **1 poäng**.

---

(3) (a) Förklara varför man kan beräkna inversmatrisen till en kvadratisk matris A genom att utföra Gauss-Jordanelimination på totalmatrisen $(A|I)$, där I är identitetsmatrisen av samma storlek som A. **(1)**

(b) Visa hur detta går till i praktiken genom att beräkna inversen, A^{-1}, till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

och kontrollera att $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. **(3)**

Bedömning:

a)
- Korrekt motivering till varför det går att beräkna inversen till A genom Gauss-Jordanelimination på totalmatrisen $(A|I)$, exempelvis genom hänvisning till att radoperationer svarar mot multiplikation med elementära matriser til vänster, eller genom att se det som lösning av en matrisekvation $AX = I$, **1 poäng**.

b)
- Korrekt Gausselimination till trappform , **1 poäng**.
- Korrekt slutförd elimination till reducerad trappform med slutsats om inversen, **1 poäng** .
- Korrekt verifiering av beräkningen genom matrismultiplikationer, **1 poäng**.

---

(4) Använd induktion för att visa att

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & n+1 \end{pmatrix}$$

för alla positiva heltal n. **(4)**

Bedömning:

- Korrekt hantering av basfallet $n = 1$, **1 poäng**.
- Korrekt användning av induktionsantagandet, **1 poäng**.
- Korrekt utförd matrismultiplikation, **1 poäng**.
- Korrekt slutsats om induktionssteget och slutfört bevis med hänvisning till induktionsprincipen eller induktionsaxiomet, **1 poäng**.

---

(5) (a) Förklara vad det innebär att en kvadratisk matris går att diagonalisera. **(1)**

(b) Avgör om matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

går att diagonalisera. **(3)**

Bedömning:

a)
- Korrekt förklaring av diagonaliserbarhet, exempelvis genom att säga att det finns en bas av egenvektorer, eller genom att det finns en matris P så att $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris, **1 poäng**.

b)
- Korrekt bestämning av egenvärdena genom den karaktäristiska ekvationen, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av egenvektorerna till egenvärdet 1, **1 poäng** .
- Korrekt motiverad slutsat om att A inte går att diagonalisera , **1 poäng**.

---

(6) Beskriv hur man kan bestämma ekvationen för det plan i rummet som innehåller en given linje och en given punkt utanför linjen. Ge ett belysande exempel genom att utföra detta med punkten $(1, 1, 0)$ och linjen $(x, y, z) = (3, 0, -1) + t(0, 2, 1)$, där t är en reell parameter. **(4)**

Bedömning:

- Korrekt förklaring till hur man kan finna normalvektorn till planet, **1 poäng**.
- Korrekt förklaring till hur normalvektorn kan användas för att få fram ekvationen för planet med hjälp av en punkt, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av normalvektorn i det aktuella exemplet, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av planets ekvation, **1 poäng**.

DEL B

(7) Bestäm basbyten i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ som gör att den linjära avbildningen T, som har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

med avseende på standardbaserna, får matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

med avseende på de nya baserna. Ange båda basbytesmatriserna och var noggrann med att ange åt vilket håll basbytena går. **(4)**

Bedömning:

a)
- Korrekt slutsats om att $\overline{f}_3$ måste skickas på noll, **1 poäng**.
- Korrekt motiverat val av övriga basvektorer för $\mathbb{R}^3$, **1 poäng**.
- Korrekt motiverat val av bas för $\mathbb{R}^2$, **1 poäng**.
- Korrekta basbytesmatriser, inklusive riktning på basbytet, **1 poäng**.

---

(8) Egenvektorer som hör till olika egenvärden till en symmetrisk matris är automatiskt ortogonala mot varandra. Använd detta för att finna en ortonormal bas av egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 6 & -3 \\ 15 & 4 & 6 & -3 \\ 6 & 6 & -2 & 12 \\ -3 & -3 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

där $\overline{u}_1 = (1,1,1,1)^t$, $\overline{u}_2 = (0,0,1,2)^t$, $\overline{u}_3 = (1,0,-2,1)^t$ och $\overline{u}_4 = (-1,1,0,0)^t$ är fyra linjärt oberoende egenvektorer till A. **(4)**

Bedömning:

- Korrekt analys av vilka egenvektorer som hör till samma egenvärde, **1 poäng**.
- Korrekt metod för att finna egenvektor med egenvärde 22 som är ortogonal mot $\overline{u}_1$, **1 poäng**.
- Korrekt ortogonal bas av egenvektorer, **1 poäng**.
- Korrekt normerad bas av egenvektorer, **1 poäng**.

---

(9) En *ellips* i planet med centrum i origo kan ses som en nivåkurva till en kvadratisk form, dvs lösningarna till ekvationen $Q(x,y) = k$ för någon kvadratisk form $Q(x,y)$ och någon konstant k. Om vi efter ett ortogonalt koordinatbyte skriver ellipsens ekvation på den *kanoniska* formen

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

där $a \geq b > 0$, kommer den att som bredast vara $2a$ i *storaxelriktningen* och som smalast $2b$ i *lillaxelriktningen*.

(a) Bestäm ekvationen för den ellips som har $a = 5\sqrt{2}$ och $b = 5$ och som har storaxelrikningen $(1,7)$. **(3)**

(b) Avgör om punkten $(0,7)$ ligger utanför eller innanför denna ellips. **(1)**

Bedömning:

a)
- Korrekt slutsats om lillaxelriktningen, **1 poäng**.
- Korrekt uppställning för att bestämma matrisen för den kvadratiska formen, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av ekvationen för ellipsen, **1 poäng**.

b)
- Korrekt motiverad slutsats om att punkten ligger inuti ellipsen, **1 poäng**.

---

(10) I tillämpningar inom statistik förekommer *stokastiska matriser*. Det är kvadratiska matriser där elementen i matrisen är sannolikheter och därför ligger i intervallet $[0,1]$ och där summan av elementen i varje kolonn är lika med 1.

(a) Visa att produkten av två stokastiska matriser av samma storlek också är en stokastisk matris. **(2)**

(b) Visa att varje stokastisk matris har ett egenvärde som är 1. **(2)**

Bedömning:

a)
- Korrekt motivering till att produkten av stokastiska 2×2-matriser är stokastiska, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till att det stämmer i allmänhet, **2 poäng**.

b)
- Korrekt motivering till att stokastiska 2×2-matriser har ett egenvärde som är 1, **1 poäng**.
- Korrekt motivering för att detta gäller för alla stokastiska matriser, **2 poäng**.
