KONTROLLSKRIVNING 2 30 sep 2009
CMEDT1

Tid 45 min. **Inga hjälpmedel är tillåtna på kontrollskrivningar.**
För godkänd krävs 6 poäng av total 9 poäng.
a) Om du uppnår 6-8 poäng på KS1 får du 3 poäng på tentauppgift 2 vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen.
b) Om du uppnår 9 poäng på KS1 får du istället 4 poäng på tentauppgift 2 (och behöver inte lösa denna uppgift).
Bonuspoäng tillgodoräknas på uppgift 2 på ordinarie tentamen samt ordinarie omtentan.

Uppgift 1. (3p) en avbildning definieras genom att varje vektor i rymden speglas i planet

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$ Bestäm avbildningens matris.

Uppgift 2. (3p)
2a) Lös följande matrisekvation med avseende på X
$AX + B = C^t$,
då $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
(C^t är transponatet till C.)

2b) Lös följande matrisekvation med avseende på Y

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$.
2c) För en kvadratisk matris gäller
$A^2 + 4A - 7I = O$
Bestäm A^{-1}.

Uppgift 3. (3p)
3a) Utryck vektor $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av vektorerna
$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
3b) För en linjär avbidning med avbildningsmatrisen A gäller
$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Använd resultat i 3a) för att bestämma $A\vec{w}$.

Lycka till!

KONTROLLSKRIVNING 2 30 sep 2009
CMEDT1
LÖSNINGSFÖRSLAG:

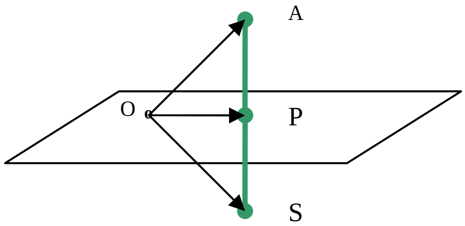
Uppgift 1. (3p) en avbildning definieras genom att varje vektor i rymden speglas i planet

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Bestäm avbildningens matris.

Lösning:
Låt A= (a_1, a_2, a_3) vara en godtyckligt punkt och S=(y_1, y_2, y_3) punktens A spegelbild.

Vi betecknar $\vec{u} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{N} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{OS} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Se bilden nedan. Lägg märke till att punkten O=(0,0,0) ligger i planet.



Då gäller:

$$\vec{PA} = proj_{\vec{N}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \circ \vec{N}}{\vec{N} \circ \vec{N}}\vec{N} = \frac{3a_1 + 2a_2 + a_3}{14}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (9a_1 + 6a_2 + 3a_3)/14 \\ (6a_1 + 4a_2 + 2a_3)/14 \\ (3a_1 + 2a_2 + a_3)/14 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{AS} = \vec{OA} - 2\, proj_{\vec{v}}\vec{N}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} (9a_1 + 6a_2 + 3a_3)/14 \\ (6a_1 + 4a_2 + 2a_3)/14 \\ (3a_1 + 2a_2 + a_3)/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{9}{7}a_1 - \frac{6}{7}a_2 - \frac{3}{7}a_3 \\ a_2 - \frac{6}{7}a_1 - \frac{4}{7}a_2 - \frac{2}{7}a_3 \\ a_3 - \frac{3}{7}a_1 - \frac{2}{7}a_2 - \frac{1}{7}a_3 \end{pmatrix}$$

Alltså

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{7}a_1 - \frac{6}{7}a_2 - \frac{3}{7}a_3 \\ -\frac{6}{7}a_1 + \frac{3}{7}a_2 - \frac{2}{7}a_3 \\ -\frac{3}{7}a_1 - \frac{2}{7}a_2 + \frac{6}{7}a_3 \end{pmatrix}$$

Svar: Avbildningens matris är A= $\begin{pmatrix} -\frac{2}{7} - \frac{6}{7} - \frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} + \frac{3}{7} - \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} - \frac{2}{7} + \frac{6}{7} \end{pmatrix}$.

Uppgift 2. (3p)

2a) Lös följande matrisekvation med avseende på X

$AX + B = C^t$,

då $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(C^t är transponatet till C.)

Lösning:

det(A) = $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ matrisen är inverterbar.

$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

$AX + B = C^t \Rightarrow AX = C^t - B \Rightarrow X = A^{-1}(C^t - B)$

Vi har $C^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ och $C^t - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Slutligen

$$X = A^{-1}(C^t - B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

2b) Lös följande matrisekvation med avseende på Y

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ är inte inverterbar eftersom determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Enligt regler för matrismultiplikation, måste Y vara av typ (format) 2×1.

Alltså $Y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Substitution i ekvationen ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$x = 4 - y$

En variabel, t ex *y*, varierar fritt och systemet har oändligt många lösningar,

$Y = \begin{bmatrix} 4 - y \\ y \end{bmatrix}$

Vi kan beteckna *y*=*t;* då *x*=4–*t* och $Y = \begin{bmatrix} 4 - t \\ t \end{bmatrix}$

Svar: $Y = \begin{bmatrix} 4 - t \\ t \end{bmatrix}$, där *t* är ett godtyckligt tal.

2c) För en kvadratisk matris gäller

$A^2 + 4A - 7I = O$

Bestäm A^{-1}.

Lösning:

$$A^2 + 4A - 7I = O \Rightarrow A^2 + 4A = 7I \Rightarrow A(A + 4I) = 7I \Rightarrow A(A + 4I)\frac{1}{7} = I$$

Härur ser vi att matrisen A är inverterbar och att $A^{-1} = \frac{1}{7}(A + 4I)$

Uppgift 3. (3p)

3a) Utryck vektor $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av vektorerna

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 \Rightarrow x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 2, \quad y = 1$$

Svar: $\vec{w} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

3b) För en linjär avbidning med avbildningsmatrisen A gäller

$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Använd resultat i 3a) för att bestämma $A\vec{w}$.

Lösning :

$$A\vec{w} = A(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = 2A\vec{v}_1 + A(\vec{v}_2) = 2\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$