KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2
Måndagen den 23 november 2009

UPPGIFT

a) Beräkna determinanten av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3)

b) Använd minsta-kvadratmetoden för att finna den funktion $f(x) = a\cos x + b\sin x$ som bäst passar till de givna mätningarna $f(0) = 2$, $f(\pi/4) = 0$ och $f(\pi/2) = -3$. **(3)**

c) Bestäm matrisen för den linjära avbildning T från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$T(\overline{u}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T(\overline{v}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

där $\overline{u} = (1,4)^t$ och $\overline{v} = (2,9)^t$. **(3)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Vi kan använda Gausselimination för att bestämma determinanten genom

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = [\text{lägg 3/2 ggr rad 1 till rad 3}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \end{vmatrix}$$

$$= [\text{byt rad 3 och 4}] = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -42 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (-42) = 42.$$

Vi kan också göra beräkningen genom att utveckla determinanten efter andra kolonnen och får då att

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4 \cdot 4 - 2 \cdot 1) - ((-3) \cdot 4 - 2 \cdot 1) \\ &= 2 \cdot 14 - (-14) = 42.\end{aligned}$$

b) Om vi ställer upp villkoret att funktionens värden ska överensstämma med de givna får vi

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a\cos 0 & + & b\sin 0 & = & 2 \\ a\cos\frac{\pi}{4} & + & b\sin\frac{\pi}{4} & = & 0 \\ a\cos\frac{\pi}{2} & + & b\sin\frac{\pi}{2} & = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 1\cdot a & + & 0\cdot b & = & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a & + & \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b & = & 0 \\ 0\cdot a & + & 1\cdot b & = & -3 \end{array}\right.$$

För att få den minsta-kvadralösningen, som ger den minsta skillnaden mellan höger- och vänsterled, söker vi en lösningen till normalekvationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vi kan lösa detta genom att använda Gausselimination på totalmatrisen

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -3 \end{array}\right) \sim [\text{rad 1 ggr } \tfrac{2}{3}] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -3 \end{array}\right) \sim [\text{dra } \tfrac{1}{2} \text{ ggr rad 1 från rad 2}] \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{11}{3} \end{array}\right) \sim [\text{rad 2 ggr } \tfrac{3}{4}] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{4} \end{array}\right) \sim [\text{dra } \tfrac{1}{3} \text{ ggr rad 2 från rad 1}] \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{4} \end{array}\right)\end{aligned}$$

och vi får att den minsta-kvadratlösningen ges av $a = \frac{9}{4}$ och $b = -\frac{11}{4}$. Alltså ligger funktionen

$$f(x) = \frac{9}{4}\cos x - \frac{11}{4}\sin x$$

närmast de givna mätdata i minsta-kvadratmening.

c) För att bestämma matrisen för avbildningen behöver vi bestämma dess värde på standardbasvektorerna $(1,0)^t$ och $(0,1)^t$. Eftersom vi känner värdena på $\overline{u}$ och $\overline{v}$ behöver vi uttrycka standardbasvektorerna som linjärkombinationer av $\overline{u}$ och $\overline{v}$. Vi kan lösa båda dessa problem samtidigt genom att använda dubbla högerled och får då totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Alltsp har vi att $(1,0)^t = 9\overline{u} - 4\overline{v}$ och därmed

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T(9\overline{u} - 4\overline{v}) = 9T(\overline{u}) - 4T(\overline{v}) = 9\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

och $(0,1)^t = -2\overline{u} + \overline{v}$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T(-2\overline{u} + \overline{v}) = -2T(\overline{u}) + T(\overline{v}) = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alltså ges matrisen för T av

$$A = \begin{pmatrix} 35 & -8 \\ 2 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi kan kontrollera att

$$\begin{pmatrix} 35 & -8 \\ 2 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35\cdot 1 - 8\cdot 4 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 4 \\ -9\cdot 1 + 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} 35 & -8 \\ 2 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35\cdot 2 - 8\cdot 9 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot 9 \\ -9\cdot 2 + 2\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Svar:

a) $\det(A) = 42$.

b) Funktionen $f(x) = \frac{9}{4}\cos x - \frac{11}{4}\sin x$ ligger närmast de givna mätdata i minsta-kvadratmening.

c) Matrisen för avbildningen är $A = \begin{pmatrix} 35 & -8 \\ 2 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$

BEDÖMNINGSKRITERIER

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag, men de måste i så fall identifieras och markeras tydligt vid egenbedömningen.

a)
- En korrekt radoperation, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd Gausselimination, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av determinanten, **1 poäng**.

alt. a)
- Korrekt utveckling efter rad eller kolonn, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av kofaktorerna, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av determinanten, **1 poäng**.

b)
- Korrekt normalekvation, **1 poäng**.
- Korrekt lösning av normalekvationen, **1 poäng**.
- Korrekt slutsats, **1 poäng**.

c)
- Korrekt uppställt ekvationssystem för att bestämma bilderna av standardbasvektorerna, **1 poäng**.
- Korrekt lösning av ekvationssystemet, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om matrisen för T, **1 poäng**.

Bedömning av presentationen. Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

0p Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.

1p Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.

2p Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.

3p Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar. (Dessutom krävs minst sex poäng på uppgifterna)

Egenbedömning. Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömninngskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning. Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.